Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 2

УДК 517.512.6

МАТЕМАТИКА

Ариф С. ДЖАФАРОВ

О СФЕРИЧЕСКИХ АНАЛОГАХ КЛАССИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ ДЖ. ДЖЕКСОНА И С. Н. БЕРНШТЕЙНА

(Представлено академиком И. Н. Векуа 12 X 1971)

Пусть S^k, $k \geqslant 3$, — единичная сфера k-мерного эвклидова пространства, $C(S^k)$ — пространство непрерывных на S^k функций. Для каждой функции $f(x) \in C(S^k)$ обозначим через $f_h(x)$ ее среднее значение вдоль окружности с центром в точке x со сферическим радиусом h:

$$f_h(x) = \frac{1}{|S^{k-1}|\sin^{k-2}h} \int\limits_{(x,\, y)=\cos h} f(y)\, dt(y),$$

где (x, y) — скалярное произведение единичных векторов x и y, $|S^{k-1}|$ — полная поверхность единичной сферы S^{k-1}. Положим для любой функции $f(x) \in C(S^k)$

$$\Omega_f(\delta) = \Omega(f;\, \delta) = \sup_{\chi>0} \frac{\omega_f(\chi\delta)}{(1+\chi)^2},$$

где

$$\omega_f(\delta) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \|f - f_h\|_{C(S^k)}.$$

Величину $\Omega_f(\delta)$ будем называть обобщенным (сферическим) модулем непрерывности функции $f(x)$.

Пусть, далее, D — оператор Лапласа на сфере S^k, т. е. угловая часть оператора Лапласа в k-мерном эвклидовом пространстве, записанного в полярных координатах. Будем говорить, что функция $f(x) \in C^{(p)}(S^k)$, где p — целое неотрицательное число, если к функции $f(x)$ p раз применим оператор Лапласа D и результат применения — функция $D^p f(x) \in C(S^k)$, причем $C^{(0)}(S^k) \equiv C(S^k)$.

Имеет место следующая теорема, являющаяся сферическим аналогом классической теоремы Дж. Джексона для 2π-периодических функций.

Теорема 1. *Если функция $f(x) \in C^{(p)}(S^k)$, $p \geqslant 0$, то при любом натуральном n*

$$E_n(f) \leqslant \frac{C_p}{n^{2p}}\, \Omega\left(D^p f;\, \frac{1}{n}\right),$$

где $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ посредством гиперсферических полиномов порядка не выше $n-1$.

Для доказательства теоремы 1 рассматривается линейный интегральный оператор $D_n^{[m]}(f;\, x)$, являющийся аналогом интегрального оператора Дж. Джексона для 2π-периодических функций. Этот оператор имеет вид

$$D_n^{[m]}(f;\, x) = \frac{1}{J_n^{[m]}} \int\limits_{S^k} f(y)\, D_n^{[m]}[(x,\, y)]\, dS(y),$$

где

$$J_n^{[m]} = |S^{k-1}| \int\limits_0^\pi D_n^{[m]}(\cos\gamma) \sin^{k-2}\gamma\, d\gamma, \qquad D_n^{[m]}(\cos\gamma) = \left(\frac{\sin^{1/2} n\gamma}{n \sin^{1/2}\gamma}\right)^{2m},$$

m — некоторое натуральное число.

Для оператора $D_n^{[m]}(f; x)$, значение которого есть гиперсферический полином порядка не выше $m(n-1)$, доказывается

Теорема 2. *Для любой функции $f(x) \in L(S^k)$ при любом натуральном n*

$$|f(x) - D_n^{[m]}(f; x)| \leqslant \frac{C_{m,k}}{n^{2m-k+1}} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2m-k} W[f; x]\left(\frac{\pi}{\nu}\right),$$

где

$$W[f; x](\delta) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \frac{1}{h} \int_0^h |f_\gamma(x) - f(x)|\, d\gamma.$$

Следствие 2.1. *Если $f(x) \in C(S^k)$, то при любом натуральном n*

$$\|f - D_n^{[m]}(f)\|_{C(S^k)} \leqslant \Omega_f\left(\frac{1}{n}\right)\begin{cases} C_k \ln n & \text{при} \quad 2m-1=k; \\ C_{m,k} & \text{при} \quad 2m-1>k. \end{cases}$$

Следствие 2.2. *Если функция $f(x) \in C(S^k)$ и m — натуральное число, $2m-1 \geqslant k$, то при любом натуральном n*

$$E_n(f) \leqslant \frac{C_{m,k}}{n^{2m-k+1}} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2m-k} \omega_f\left(\frac{\pi}{\nu}\right).$$

Аналогичная теорема имеет место для оператора Пуассона.

Теорема 3. *Если функция $f(x) \in L(S^k)$ и $P_r(f; x)$ — ее интеграл Пуассона, то при любом r, $0 < r_0 \leqslant r < 1$,*

$$|f(x) - P_r(f; x)| \leqslant C_k(1-r) \sum_{\nu=1}^{[1/(1-r)]} W[f; x]\left(\frac{\pi}{\nu}\right).$$

Теоремы 2 и 3 справедливы и для функций $f(x) \in L(S^2)$, т. е. для суммируемых 2π-периодических функций. В этом случае в качестве величины $f_h(x)$ нужно взять $f_h(x) = {}^1/_2[f(x+h) + f(x-h)]$.

Перейдем теперь к обратным теоремам. Следующие теоремы формулируются точно так же, как и соответствующие обратные теоремы теории наилучших приближений 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами, полученные С. Б. Стечкиным (1).

Теорема 4. *Для любой функции $f(x) \in C(S^k)$ при любом натуральном n*

$$\Omega\left(f; \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{C}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \nu E_\nu(f).$$

Теорема 5. *Пусть функция $f(x) \in C(S^k)$ и при некотором натуральном p сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2p-1} E_n(f).$$

Тогда $f(x) \in C^{(p)}(S^k)$ и справедливы неравенства:

$$1)\ E_n(D^p f) \leqslant C_p\left\{n^{2p} E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{2p-1} E_\nu(f)\right\};$$

$$2)\ \Omega\left(D^p f; \frac{1}{n}\right) \leqslant C_p\left\{\frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2p+1} E_\nu(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{2p-1} E_\nu(f)\right\}.$$

Доказательства теорем 4 и 5 опираются на следующие леммы.

Лемма 1. *Если функция* $f(x) \in C^{(1)}(S^k)$, *то*

$$\|f - f_h\|_{C(S^k)} \leqslant h^2 \|Df\|_{C(S^k)}.$$

Лемма 2. *Если* $S_n(x)$ — *гиперсферический полином порядка* n, *то*

$$\|DS_n\|_{C(S^k)} \leqslant C_k n^2 \|S_n\|_{C(S^k)}.$$

Последнее неравенство является аналогом известного неравенства С. Н. Бернштейна для производных тригонометрического полинома.

Из теорем 1,4 и 5 в качестве следствия вытекает

Теорема 6. *Пусть функция* $\varphi(\delta)$ *удовлетворяет* $(\mathfrak{L}_2)$-*условию С. М. Лозинского* (2).

Тогда, для того чтобы функция $f(x) \in C^{(p)}(S^k)$ *и*

$$\Omega(D^p f;\ \delta) = O(\varphi(\delta)),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{2p}}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

При $p = 0$ *достаточно потребовать, чтобы функция* $\varphi(\delta)$ *удовлетворяла* (B_2)-*условию Н. К. Бари* (2).

Теорема 6 и леммы 1 и 2 справедливы также в пространстве $L_2(S^k)$. Теорема 6 в случае $p = 0$ допускает следующее усиление.

Теорема 7. *Пусть функция* $\varphi(\delta)$ *удовлетворяет* (B_2)-*условию Н. К. Бари.*

Тогда соотношения *

$$E_n(f) \sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad \Omega(f;\ \delta) \sim \varphi(\delta)$$

равносильны.

В качестве приложения приведем следующие результаты.

Теорема 8. *Если функция* $f(x) \in C^{(p)}(S^k)$, $Y_n(f;\ x)$ — *общий член, а* $S_n(f;\ x)$ — *частная сумма ее гиперсферического ряда Лапласа, то при любом натуральном* n

$$\left.\begin{array}{l}\|Y_n(f)\|_{C(S^k)}\\ \|f - S_n(f)\|_{C(S^k)}\end{array}\right\} \leqslant C_{k,\,p} n^{1/2(k-2)-2p}\,\Omega\left(D^p f;\ \frac{1}{n}\right).$$

Теорема 9. *Пусть* $\sum Y_n(x)$ — *гиперсферический ряд с общим членом*

$$Y_n(x) = O\left(\frac{1}{n^{2p+1}}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где p — *целое неотрицательное число, функция* $\varphi(\delta)$ *удовлетворяет* $(\mathfrak{L}_2)$-*условию С. М. Лозинского (при* $p = 0$ *достаточно потребовать, чтобы функция* $\varphi(\delta)$ *удовлетворяла* (B_2)-*условию Н. К. Бари).*

Тогда заданный гиперсферический ряд сходится равномерно (и абсолютно) и, если функция $f(x)$ — *ее сумма, то* $f(x) \in C^{(p)}(S^k)$, *причем*

$$\Omega(D_p f;\ \delta) = O(\varphi(\delta)).$$

Рассмотрим теперь вопрос об абсолютной сходимости рядов Фурье по ортонормированной системе гиперсферических функций $\tilde{Y}_n^{(\nu)}(x)$, $1 \leqslant \nu \leqslant \nu_n^k$; $\nu_n^k = (2n + k - 2)\dfrac{(n+k-3)!}{n!\,(k-2)!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Теорема 10. *Пусть функция* $f(x) \in L_2(S^k)$, β — *любое число,* $0 < \alpha \leqslant 2$.

Тогда сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta - 1/2\alpha}\left\{\omega_f^{(2)}\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^{\alpha},$$

* Символ $\varphi(t) \sim \psi(t)$ понимается так: $\varphi(t) = O(\psi(t))$ и $\psi(t) = O(\varphi(t))$.

где

$$\omega_f^{(2)}(\delta) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \|f - f_h\|_{L_2(S^k)},$$

влечет сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}\rho_n^{\alpha}(f),$$

где

$$\rho_n^2(f) = \sum_{\nu=1}^{\nu_n^k} C_{\nu n}^2(f),$$

$C_{\nu n}(f)$ — *коэффициенты Фурье функции* $f(x)$ *по системе* $\{\tilde{Y}_n^{(\nu)}(x)\}$.

Теорема 11. *Пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ — *функции из* $L_2(S^k)$, *связанные соотношением*

$$\|g - g_h\|_{L_2(S^k)} \leqslant \|f - f_h\|_{L_2(S^k)}. \qquad (*)$$

Тогда если $\rho_n(f) \leqslant \rho_n$ *и при некотором* α, $0 < \alpha \leqslant 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-5/2\alpha}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^4\rho_\nu^2\right\}^{1/2\alpha} < \infty$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2\alpha}\left\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \rho_\nu^2\right\}^{1/2\alpha} < \infty,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{\alpha}(g) < \infty.$$

Следствие 11.1. *Пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ — *функции из* $L_2(S^k)$, *связанные соотношением* $(*)$.

Тогда, если $\rho_n(f) \leqslant \rho_n$, $\rho_n \downarrow 0$ *и при некотором* α, $2/5 < \alpha \leqslant 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{\alpha} < \infty,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{\alpha}(g) < \infty.$$

Некоторые результаты настоящей заметки для функций, заданных на сфере трехмерного эвклидова пространства и на отрезке, были получены нами ранее ([3–5]). Укажем также работы ([6]) и ([7]), в которых получен ряд результатов, примыкающих к некоторым затронутым здесь задачам. В этих же работах можно найти ссылки на обширную литературу.

Азербайджанский государственный университет
им. С. М. Кирова
Баку

Поступило
21 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Б. Стечкин, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, № 3 (1951). [2] Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, Тр. Моск. матем. общ., 5, 483 (1956). [3] Ариф С. Джафаров, Изв. АН АзербССР, № 5 (1968). [4] Ариф С. Джафаров, ДАН, 184, № 1 (1956). [5] Ариф С. Джафаров, ДАН, 187, № 4 (1969). [6] Р. В. Капанадзе, Сообщ. АН ГрузССР, 45, 1, 21 (1967). [7] Д. К. Угулава, Сообщ. АН ГрузССР, 49, № 3 (1968).