

Е. А. КРАСИЛЬЩИКОВА

ДИФРАКЦИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ДВИЖУЩЕЙСЯ И НЕПОДВИЖНОЙ ПЛАСТИНКЕ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 15 VI 1971)

1. В безграничном объеме идеального газа распространяется слабая ударная волна. Фронт ударной волны есть плоскость, перемещающаяся со скоростью звука c . Ударная волна набегаёт на плоскую пластинку ширины d . Пластинка движется прямолинейно поступательно с дозвуковой скоростью u под углом атаки, равным нулю; в частности, пластинка может находиться в состоянии покоя. Вектор c образует с плоскостью пластинки угол β , $0 \leq \beta \leq \pi$ ^(1, 2).

Возьмем неподвижную систему осей координат Oxz (рис. 1). Закон движения пластинки задан в виде

$$x = F(t), \quad (1)$$

где F — произвольная непрерывная функция времени; $F'(t) = u$ ⁽³⁾. Потенциал скорости Φ удовлетворяет уравнению

$$c^2(\Phi_{xx} + \Phi_{zz}) - \Phi_{tt} = 0. \quad (2)$$

Представим Φ в виде $\Phi = \varphi_\omega(x, z, t) + \varphi(x, z, t)$, где φ_ω — заданный потенциал скорости в набегающей волне ⁽⁴⁾. Искомая функция φ есть решение волнового уравнения, удовлетворяющее следующим условиям на оси Ox : впереди пластинки

$$\varphi = 0; \quad (3)$$

на пластинке за фронтом волны

$$\varphi_z = -[\varphi_{\omega z}(x, z, t)]_{z=0} = A_\omega(x, t); \quad (4)$$

за пластинкой

$$\varphi_t = 0. \quad (5)$$

В случае неподвижной пластинки всюду на оси Ox вне пластинки выполняется условие (3). Задачу достаточно решить для $z \geq 0$, так как $\varphi(x, -z, t) = -\varphi(x, z, t)$.

К решению задачи применим метод интегральных уравнений, развитый в теории тонкого крыла ^(5, 6).

2. Обратимся к пространству переменных x, z, t ^(3, 7). В плоскости (xt) определим области $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$, в которых соответственно заданы условия (4), (3), (5). Область Σ ограничена кривыми L_1, L_2 и W (рис. 2). Кривые L_1 и L_2 являются изображениями законов движения точек A и B — границ пластинки. Кривая W изображает закон движения точки пересечения фронта волны с осью Ox . Точки O и B_1 соответствуют границам A и B в моменты прохождения через них фронта ударной волны. Прямые OE, OE_1 и прямые B_1K, B_1K_1 являются линиями пересечения характеристических конусов уравнения (2) с плоскостью (xt) . Границами области Σ_1 являются кривая L_1 и прямая OE , а области Σ_2 — L_2 и B_1K_1 .

Прямые OE_1 и B_1K многократно отражаются от кривых L_1 и L_2 (рис. 2). Наряду с координатами точек O и B_1 приведем координаты точек отраже-

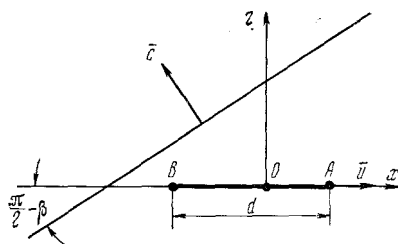
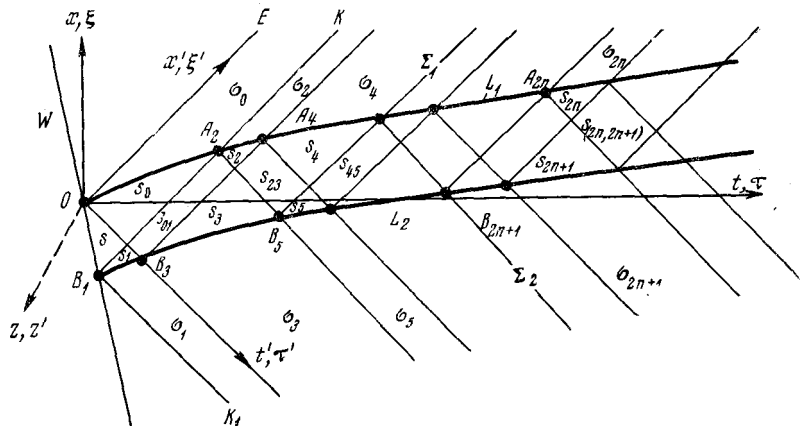


Рис. 1

ния:

$$O(x_0 = 0, t_0 = 0), \quad A_2(x_2, t_2), \quad A_4(x_4, t_4), \dots, \\ A_{2n}(x_{2n}, t_{2n}), \dots, B_1(x_1, t_1), \quad B_3(x_3, t_3), \\ B_5(x_5, t_5), \dots, B_{2n+1}(x_{2n+1}, t_{2n+1}), \dots$$

Точки оси Ox с координатами $x_0, x_2, x_4, \dots, x_{2n}, \dots$ являются центрами цилиндрических дифракционных волн, возникающих на границе A пластинки соответственно в моменты времени $t_0, t_2, t_4, \dots, t_{2n}, \dots$. Точки с коорди-



ского, придем к интегральному уравнению

$$\int_{x_1}^{x'} \int_{F_2(\xi')}^{t'} [\vartheta(\xi', \tau') + \vartheta(\xi', \tau')] \frac{d\tau' d\xi'}{V(x' - \xi')(t' - \tau')} = \Phi_{2n+1}(x', t'), \quad (8)$$

где $\tau' = F_2(\xi')$ — уравнение кривой L_2 , а величина x_1' определяется из уравнения

$$x_1' + F_2(x_1') \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} = 0.$$

Функция $\xi' = -\tau' \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}$ есть уравнение линии W .

Функции Φ_{2n} и Φ_{2n+1} зависят от функций ϑ_{2k} и ϑ_{2k+1} для $k \leq n-1$. Функции Φ_{2n} и Φ_{2n+1} при $n=0$ являются заданными. Если уже найдены функции ϑ_{2k} и ϑ_{2k+1} для всех индексов $k \leq n-1$, то правые части уравнений (7) и (8) становятся известными.

Решения интегральных уравнений вида (7) и (8) даны нами ранее ⁽⁵⁾. Идя в направлении оси времени последовательно, находим функции ϑ_0 , ϑ_1 , ϑ_2 , ϑ_3 , ..., ϑ_{2n} , ϑ_{2n+1} для любого номера n .

3. Рассмотрим задачу о дифракции акустической волны на движущейся полуплоскости. В этом случае область Σ_1 содержит только одну область σ_{2n} для $n=0$. В соответствии с формулой (6) решение задачи представится в виде интеграла

$$\Phi^*(x', z', t') = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{A_\omega^*(\xi', \tau') d\xi' d\tau'}{V(x' - \xi')(t' - \tau') - (z')^2}, \quad (9)$$

где область интегрирования S принадлежит области S' . Через Φ^* и A_ω^* обозначены функции Φ и A_ω в новых переменных.

Для совокупностей переменных x' , z' , t' , расположенных внутри характеристического конуса с вершиной в точке O , в решении (9) переменные интегрирования в области S изменяются в пределах

$$-\tau' \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \leq \xi' \leq x' - \frac{(z')^2}{t' - \tau'}, \quad a \leq \tau' \leq b,$$

где предел a определяется, как корень уравнения $(t' - \tau')[F_1(\tau') - x'] + (z')^2 = 0$ с меньшим значением τ' , а предел b — как корень уравнения

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \cdot (\tau')^2 + \left(x' - t' \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}\right) \tau' - x't' + (z')^2 = 0 \quad (10)$$

с большим значением τ' . Решение задачи вне указанного конуса отличается только значением нижнего предела интегрирования по τ' . Здесь оба предела a и b определяются как корни уравнения (10).

4. Рассмотрим задачу о дифракции акустической волны на неподвижной пластинке ⁽⁸⁾. В этом случае L_1 и L_2 являются прямыми линиями, параллельными оси Ot и отстоящими друг от друга на расстоянии d . В отличие от общего случая движущейся пластинки обозначим производную φ_{2n} в области $\sigma_{2n+1} \subset \Sigma_2$ через ϑ_{2n+1} , $n=0, 1, 2, 3, \dots$

Решение ϑ_{2n} для $n \geq 1$ найдем из уравнения вида (7):

$$\begin{aligned} \vartheta_{2n}(x', t') = & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{V_{x'-t'}} \left\{ \int_{t'-2d/c}^{t'} A_\omega^*(\xi', t') \frac{V_{t'-\xi'}}{x'-\xi'} d\xi' + \right. \\ & + \sum_{i=0}^{i=n-2} \int_{x_{2i+1}}^{x_{2i+3}} \vartheta_{2i+1}(\xi', t') \frac{V_{t'-\xi'}}{x'-\xi'} d\xi' + \left. \int_{x_{2n-1}}^{t'-2d/c} \vartheta_{2n-1}(\xi', t') \frac{V_{t'-\xi'}}{x'-\xi'} d\xi' \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

$x_1', x_3', x_5', \dots$ являются координатами точек $B_1, B_3, B_5, \dots$. Аналогично найдем θ_{2n+1} для $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \theta_{2n+1}(x', t') = & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t' - x' - 2d/c}} \left\{ \int_{x'}^{x' + 2d/c} A_{\omega}^*(x', \tau') \frac{\sqrt{x' + 2d/c - \tau'}}{t' - \tau'} d\tau' + \right. \\ & + \sum_{i=0}^{n-2} \int_{t_{2i}'}^{t_{2i+2}'} \theta_{2i}(x', \tau') \frac{\sqrt{x' + 2d/c - \tau'}}{t' - \tau'} d\tau' + \\ & \left. + \int_{t_{2n-2}'}^{x'} \theta_{2n-2}(x', \tau') \frac{\sqrt{x' + 2d/c - \tau'}}{t' - \tau'} d\tau' \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где величины $t_0' = 0, t_2', t_4', \dots$ являются координатами точек $O, A_2, A_4, \dots$ (рис. 2).

В формулах (11) и (12) член, содержащий сумму, определен для $n \geq 2$.

Если уже найдены функции θ_{2k} и θ_{2k+1} для всех индексов $k \leq n-1$, то по формулам (11) и (12) можно вычислить функции θ_{2n} и θ_{2n+1} . Решения θ_{2k} и θ_{2k+1} для $k=0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \theta_0(x', t') = & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x' - t'}} \int_{-t' \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}^{t'} A_{\omega}^*(\xi', t') \frac{\sqrt{t' - \xi'}}{x' - \xi'} d\xi', \\ \theta_1(x', t') = & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t' - x' - 2d/c}} \int_{-x' \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}}^{x' + 2d/c} A_{\omega}^*(x', \tau') \frac{\sqrt{x' + 2d/c - \tau'}}{t' - \tau'} d\tau'. \end{aligned}$$

Функция θ_0 определена для $0 \leq \beta < \pi$, а θ_1 — для $0 < \beta \leq \pi$.

Итак, последовательно вычисляются функции $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{2n}, \theta_{2n+1}$ для любого номера n .

Заметим, что задача о дифракции акустической волны на неподвижной пластинке математически эквивалентна задаче об обтекании установившимся сверхзвуковым потоком газа крыла малого удлинения, концевые кромки которого являются прямыми линиями, параллельными направлению набегающего потока (⁵, ⁶).

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
7 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. И. Седов, Механика сплошной среды, 2, 1970. ² Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, 1965. ³ Е. А. Красильщикова, ДАН, 94, № 3 (1954). ⁴ Е. А. Красильщикова, В кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды (к 60-летию академика Л. И. Седова), М., 1969. ⁵ Е. А. Красильщикова, Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке, 1952. ⁶ Е. А. Krasil'shchikova, NACA, № 1383, Washington, 1956. ⁷ E. Krasnoff, J. Aeronaut. Sci., 25, № 3 (1958). ⁸ E. H. Fox, Phil. Trans. Roy. Soc., London, Ser. A, 241, № 828 (1948).