Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 3

УДК 519.4 *МАТЕМАТИКА*

Г. Н. МАЛОЛЕТКИН

ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ПОЛУПРОСТОЙ АЛГЕБРЫ НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 3 V 1971)

1. Пусть $\mathscr{A}$ — полупростая алгебра, определенная над Q, $G = \mathscr{A}^*$ — ее мультипликативная группа. Для каждой Q-алгебры K положим $\mathscr{A}_K = \mathscr{A} \otimes_Q K$ и $G_K = \mathscr{A}_K^*$. В частности для каждого нормирования p поля Q, конечного или нет, определения $\mathscr{A}_p$ и G_p: $\mathscr{A}_p = \mathscr{A}_{Q_p}$ и $G_p = G_{Q_p}$, где $Q_\infty = \mathbf{R}$, а для конечных p Q_p — поле p-адических чисел с кольцом целых $\mathbf{Z}^{(p)}$; а также $\mathscr{A}_\mathbf{A}$ и $G_\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — кольцо аделей поля Q. Пусть M — решетка в $\mathscr{A}$, $M_p = M \otimes_Z \mathbf{Z}^{(p)}$ при $p \neq \infty$. Группа

$$U_p = \{x \in G_p,\ xM_p = M_p\}$$

есть максимальная компактная подгруппа в G_p, и группа $G_\mathbf{A}$ есть ограниченное прямое произведение групп G_p относительно U_p. Пусть U_∞ — некоторая максимальная компактная подгруппа в G_∞, $U_f = \prod\limits_{p\neq\infty} U_p$, тогда

$$U_\mathbf{A} = U_\infty \times U_f$$

есть максимальная компактная подгруппа в $G_\mathbf{A}$. Группа G_Q дискретно вкладывается в $G_\mathbf{A}$, и если Z — центр G, то объем (по $G_\mathbf{A}$-инвариантной мере $d\dot{x}$) фактор-пространства $G_\mathbf{A} / G_Q Z_\mathbf{A}$ конечен.

2. Функция φ на группе $G_\mathbf{A}$ называется **параболической формой**, если она удовлетворяет условиям $P1 - P5$:

P1. $\varphi(xz\gamma) = \varphi(x)$ для всех $x \in G_\mathbf{A}$, $z \in Z_\mathbf{A}$, $\gamma \in G_Q$.

P2. $\varphi \in L^2(G_\mathbf{A} / G_Q Z_\mathbf{A})$, т. е.

$$\int\limits_{G_\mathbf{A}/G_Q Z_\mathbf{A}} |\varphi(\dot{x})|^2 d\dot{x} < \infty,$$

где $\dot{x}$ — образ x при проекции $G_\mathbf{A} \to G_\mathbf{A} / G_Q Z_\mathbf{A}$.

P3. φ параболична, т. е. для любой подгруппы N, являющейся унипотентным радикалом некоторой параболической подгруппы в G, функция

$$x \to \int\limits_{N_\mathbf{A}/N_Q} \varphi(xn),$$

где dn — $N_\mathbf{A}$-инвариантная мера на $N_\mathbf{A}/N_Q$, равна нулю почти всюду.

P4. φ — $U_\mathbf{A}$-конечна, т. е. пространство функций вида $x \to \varphi(ux)$, $x \in G_\mathbf{A}$, $u \in U_\mathbf{A}$, конечномерно.

P5. Пусть $\mathscr{Z}$ — центр универсальной обертывающей алгебры для G_∞, действующей на функции на G_∞ дифференциальными операторами [5].

Тогда для любого $x \in G_\mathbf{A}$ функция φ_x: $\dot{x}_\infty \to \varphi(x_\infty x)$ на группе Ли G_∞ $\mathscr{Z}$-конечна, т. е. пространство функций $\mathscr{D}\varphi_x$, $\mathscr{D} \in \mathscr{Z}$, конечномерно.

Из P5 и конечности числа классов $G_\infty U_f x G_Q$ [4] следует, что существует такой идеал конечной коразмерности $\mathscr{J} \subset \mathscr{Z}$, что $\mathscr{D}\varphi_x = 0$ для всех $\mathscr{D} \in \mathscr{J}$ и $x \in G_\mathbf{A}$. Из P4 следует, что существует такая подгруппа конечного индекса $V_f \in U_f$, что $\varphi(ux) = \varphi(x)$ при $x \in G_\mathbf{A}$, $u \in V_f$. В пространстве функций вида $x \to \varphi(ux)$ индуцируется некоторое конечномерное представление ρ группы $U_{\mathbf{A}}$. Пусть $P(\rho, \mathcal{J})$ — пространство параболических форм с фиксированными ρ и $\mathcal{J}$. Оно конечномерно [5].

3. Унитарное представление L_x: $\varphi(y) \to \varphi(x^{-1}y)$ группы $G_{\mathbf{A}}$ в пространстве $L_0^2(G_{\mathbf{A}}/Q_{\mathbf{Q}}Z_{\mathbf{A}})$ функций, удовлетворяющих P1 — P3, распадается в прямую дискретную сумму неприводимых: $L_0^2(G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}Z_{\mathbf{A}}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i$ [2]. Если φ — параболическая форма, то лишь конечное число ее проекций в $\mathcal{H}_i$ отличны от нуля, так как они принадлежат тому же $P(\rho, \mathcal{J})$, что и сама φ. Представление $G_{\mathbf{A}}$ в каждом $\mathcal{H}_i$ есть тензорное произведение неприводимых представлений T_p $(p = \infty, 2, 3, \ldots)$ групп G_p в пространствах $\mathcal{H}_{ip}$ [2]; обозначим через t_i изоморфизм $\mathcal{H}_i$ на $\otimes \mathcal{H}_{ip}$. Если $\varphi \in P(\rho, \mathcal{J}) \cap \mathcal{H}_i$,

$$S = \{p \text{ — конечное, } \operatorname{Ker} \rho \cap G_p \neq U_p\} \cup \{\infty\},$$

то S конечно и $t_i\varphi$ имеет вид $h_S \otimes \prod_{p \notin S} e_p$, где $h_S \in \bigotimes_{p \in S} \mathcal{H}_{ip}$, а $e_p \in \mathcal{H}_{ip}$ — тот единственный с точностью до множителя вектор длины единица из $\mathcal{H}_{ip}$, который инвариантен относительно всех T_{pu}, $u \in U_p$.

4. Пусть $|\cdot|_p$ — норма на $\mathbf{Q}_p$, совпадающая с абсолютной величиной при $p = \infty$ и такая, что $|p|_p = p^{-1}$ для конечных p. Продолжим ее на G_p, полагая $|x|_p = |Nx|_p$, где $Nx \in \mathbf{Q}_p$ — норма x в регулярном представлении G_p в $\mathcal{A}_p$. Если $p = \infty$, то обозначим через $\mathcal{S}_p$ пространство быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathcal{A}_p$, если же p конечно, то $\mathcal{S}_p$ — пространство финитных локально постоянных функций на $\mathcal{A}_p$. В последнем случае введем «стандартную весовую функцию» $f_p^0 \in \mathcal{S}_p$, полагая $f_p^0(x) = 1$, если $xM_p \subset M_p$ и $f_p^0(x) = 0$, если это не так. Преобразование Фурье $f \to \hat{f}$ относительно некоторого характера аддитивной группы $\mathcal{A}_p$ переводит $\mathcal{S}_p$ в себя [2]; назовем этот характер неразветвленным, если $\hat{f}_p^0 = f_p^0$. Пусть T_p — унитарное представление G_p в пространстве $\mathcal{H}_p$ со скалярным произведением $\langle\cdot\rangle$, $v_1, v_2 \in \mathcal{H}_p$, d_px — мера Хаара на G_p. Интеграл

$$\zeta(f, v_1, v_2, s) = \int_{G_p} f(x)\,|x|_p^s \langle T_{px}v_1, v_2\rangle\, d_px,$$

где $f \in \mathcal{S}_p$, сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Если $\mathcal{H}_p$ неприводимо, $v_1 = v_2 = e$, где $T_{pu}e = e$ для всех $u \in U_p$, $\langle e, e\rangle = 1$, то $\omega(x) = \langle T_{px}e, e\rangle$ есть зональная положительно определенная сферическая функция, и

$$\zeta(f_p^0, \omega, s) = \zeta(f_p^0, e, e, s) = \prod_{i=1}^{\dim A} (1 - \lambda_i p^{-s})^{-1},$$

$\lambda_i \in \mathbf{C}$ [1]. Если p конечно и алгебра $\mathcal{A}_p$ распадается, т. е. есть прямая сумма полных матричных алгебр над расширениями $\mathbf{Q}_p$, а характер, определяющий преобразование Фурье, неразветвлен, то существует финитная на G_p (а не только на $\mathcal{A}_p$) функция $f_p^1 \in \mathcal{S}_p$ такая, что $\hat{f}_p^1 = f_p^1$, $\zeta(f_p^1, \omega, s)$ голоморфна на всей плоскости и

$$\zeta(f_p^0, \omega, s)/\zeta(f_p^1, \omega, s) = \zeta(f_p^0, \bar{\omega}, 1-s)/\zeta(f_p^1, \bar{\omega}, 1-s),$$

где $\bar{\omega}(x) = \overline{\omega(x)}$ [3].

5. Для $x = (x_p) \in G_{\mathbf{A}}$ положим $|x| = \prod_p |x_p|_p$. Пусть $\mathcal{S}_{\mathbf{A}}$ — пространство, состоящее из конечных сумм разложимых функций вида $\otimes f_p$, где $f_p \in \mathcal{S}_p$ и для почти всех p $f_p = f_p^0$. Преобразование Фурье $f \to \hat{f}$ относительно некоторого характера аддитивной группы $\mathcal{A}_{\mathbf{A}}$ переводит $\mathcal{S}_{\mathbf{A}}$ в себя [2] и для почти всех p $\hat{f}_p^0 = f_p^0$, т. е. ограничения этого характера на ло-

кальные множители $\mathcal{A}_p$ неразветвлены почти всюду. Пусть φ и ψ — функции на $G_\mathbf{A}$, удовлетворяющие P1 и P2, $f \in \mathcal{S}_\mathbf{A}$. Интеграл

$$\zeta(f, \varphi, \psi, s) = \int_{G_\mathbf{A}} f(x)|x|^s \langle L_x\varphi, \psi\rangle\, dx$$

сходится при $\operatorname{Re} s > 1$ и называется дзета-функцией автоморфных форм φ и ψ (с весовой функцией f). Здесь dx — мера Хаара на $G_\mathbf{A}$, $\langle\varphi, \psi\rangle = \int_{G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q}Z_\mathbf{A}} \varphi(\dot{x})\psi(\dot{x})\,d\dot{x}$, $L_x\varphi(y) = \varphi(x^{-1}y)$.

Цель этой заметки — в доказательстве следующего утверждения.

Теорема. *Если φ и ψ — параболические формы, то $\zeta(f, \varphi, \psi, s)$ мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость и удовлетворяет функциональному уравнению*

$$\zeta(f, \varphi, \psi, s) = \zeta(\hat{f}, \bar{\psi}, \bar{\varphi}, 1-s),$$

где $\bar{\varphi}(x) = \overline{\varphi(x)}$.

Доказательство. Если предположить, что f и $\hat{f}$ равны нулю на $G_\mathbf{A}\cdot(A_\mathbf{Q} \setminus G_\mathbf{Q})G_\mathbf{A}$, то стандартные рассуждения, использующие формулу Пуассона ([1]), показывают, что $\zeta(f, \varphi, \psi, s)$ голоморфна на всей плоскости и удовлетворяет функциональному уравнению. Пусть теперь f — произвольная функция из $\mathcal{S}_\mathbf{A}$. Без ограничения общности можно считать ее разложимой: $f = \otimes f_p$. Далее, если $L_0^2(G_\mathbf{A}/G_\mathbf{Q}Z_\mathbf{A}) = \oplus\mathcal{H}_i$ (см. п. 3) и φ_i, ψ_i — проекции φ и ψ в $\mathcal{H}_i$, то

$$\zeta(f, \varphi, \psi, s) = \sum \zeta(f, \varphi_i, \psi_i, s),$$

где сумма конечна ($\zeta(f, \varphi_i, \psi_i, s) = 0$ при $i \neq j$, так как $\mathcal{H}_i \perp \mathcal{H}_j$). Поэтому можно считать, что φ и ψ принадлежит какому-либо $\mathcal{H}_i$. Если t — изоморфизм $\mathcal{H}_i$ на $\times\mathcal{H}_{ip}$ (см. п. 3), то для достаточно большого S $t\varphi$ и $t\psi$ имеют вид $h_S \otimes \prod_{p\in S} e_p$ и $h_S' \otimes \prod_{p\notin S} e_p$ (см. п. 3). Тогда (f, φ, ψ, s) раскладывается в «эйлеровское произведение»

$$\zeta(f, \varphi, \psi, s) = \int_{G_S} f_S(x)|x|_S^s \langle T_{Sx}h_S, h_S'\rangle\, d_Sx \cdot \prod_{p\notin S} \zeta(f_p, \omega_p, s),$$

где G_S, f_S, T_S, d_Sx, $|x|_S$ — произведения соответствующих локальных объектов. Пусть q ($q \neq \infty$, $q \notin S$) — такая точка, что $\mathcal{A}_q$ распадается и q-компоненты f_q и $\hat{f}_q$ функций f и $\hat{f}$ равны f_q^0. Заменяя $f = \otimes f_p$ на $f^1 = \bigotimes_{p\neq q} f_p \otimes f_q^1$ (см. п. 4), мы получаем голоморфную для всех s функцию $\zeta(f^1, \varphi, \psi, s)$, удовлетворяющую функциональному уравнению. Но

$$\zeta(f, \varphi, \psi, s) = \zeta(f^1, \varphi, \psi, s) \cdot \zeta(f_p^0, \omega_p, s)/\zeta(f_p^1, \omega_p, s),$$

откуда следует мероморфность $\zeta(f, \varphi, \psi, s)$ при всех s. Далее,

$$\hat{f}^1 = \bigotimes_{p\neq q} \hat{f}_p \otimes \hat{f}_q^1,$$

$$\zeta(\hat{f}, \bar{\psi}, \bar{\varphi}, 1-s) = \zeta(\hat{f}^1, \bar{\psi}, \bar{\varphi}, 1-s) \cdot \zeta(f_p^0, \bar{\omega}_p, 1-s)/\zeta(f_p^1, \bar{\omega}_p, 1-s),$$

откуда, ввиду п. 4, следует функциональное уравнения для $\zeta(f, \varphi, \psi, s)$.

Поступило
29 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Андрианов, УМН, 142, 3 (1968). [2] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. И. Пятецкий-Шапиро, Теория представлений и автоморфные функции, М., 1966. [3] Г. Н. Малолеткин, Матем. заметки, 5, 577 (1969). [4] R. Godement, Sem. Bourbaki, 257 (1962). [5] Harish-Chandra, Automorphic Forms on Semisimple Lie Groups, Heidelberg — N.-N., 1968.