Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 3

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

М. МЕРЕДОВ

О ЗАДАЧЕ ДАРБУ ДЛЯ ОДНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 V 1971)

Рассмотрим систему уравнений

$$Lu \equiv Au_{yy} - k(y)Au_{xx} + au_x + bu_y + cu = F(x, y), \tag{1}$$

где A, a, b, c — заданные $m \times m$ мартицы, причем A, a, c — симметрические матрицы, $F = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$ — заданный, а $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — искомый векторы. Скалярная функция $k(y) > 0$ при $y \neq 0$ и может обращаться в нуль при $y = 0$.

Характеристическая форма системы (1) имеет вид

$$P(x, y;\ \xi_1, \xi_2) = [\xi_2^2 - k(y)\,\xi_1^2]^m \cdot \det A.$$

Пусть G — односвязная область плоскости независимых переменных x, y, ограниченная характеристиками AC и BC системы (1), выходящими из точки $C(^1/_2, y_C)$, $y_C < 0$, и отрезком AB: $0 < x < 1$ оси $y = 0$. Следовательно, система (1) гиперболична в области G и может параболически вырождаться на нехарактеристической части AB ее границы.

Относительно коэффициентов системы и скалярной функции $k(y)$ будем предполагать, что $k(y) \in C(\bar G)$, $b \in C(\bar G)$, $a \in C(\bar G)$, $a_x \in C(\bar G)$, $c \in C(\bar G)$, $c_x \in C(\bar G)$, $A \in C^1(\bar G) \cap C^2(G)$, кроме того предположим, что матрица A, неособенная и положительная, определена в $\bar G$.

З а д а ч а Д а р б у. В области G найти решения $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ системы (1), удовлетворяющие краевым условиям

$$u|_{AB} = 0, \quad u|_{BC} = 0 \tag{D_1}$$

или

$$u_y|_{AB} = 0, \quad u|_{BC} = 0. \tag{D_2}$$

Пусть L^* — оператор, сопряженный по Лагранжу с оператором L,

$$L^*v \equiv (v\cdot A)_{yy} - k(y)\cdot(v\cdot A)_{xx} - (v\cdot a)_x - (v\cdot b)_y + v\cdot c = f(x, y). \tag{1*}$$

Условия

$$v|_{AC} = 0, \quad v|_{AB} = 0; \tag{D_1^*}$$

$$v|_{AC} = 0, \quad (v\cdot A)_y - (v\cdot b)|_{AB} = 0 \tag{D_2^*}$$

назовем к р а е в ы м и условиями, сопряженными с (D_1) и (D_2) соответственно.

Обозначим через $W(D_j)$ множество вектор-функций $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ из класса $W = C^2(G) \cap W_2^1(G) \cap W_2^1(\partial G)$, для которых $Lu \in L_{2,\omega}(G)$ и соблюдено краевое условие (D_j), а через $W(D_j^*)$ — множество вектор-функций $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ из W, для которых $L^*v \in L_{2,\omega}(G)$ и соблюдено сопряженное краевое условие (D_j^*), $j = 1, 2$, где $L_{2,\omega}(G)$ означает пространство $L_2(G)$ с некоторой весовой нормой.

С л а б ы м р е ш е н и е м задачи Дарбу (1) — (D_j) будем называть любую вектор-функцию $u \in L_2(G)$, если $(u, L^*v)_0 = (v, F)_0$ $\forall v \in W(D_j^*)$.

Р е г у л я р н ы м р е ш е н и е м задачи Дарбу будем называть любую вектор-функцию $u \in W(D_j)$.

Единственность регулярного решения задачи Дарбу и существование слабого решения сопряженной задачи для вырождающихся гиперболических уравнений были установлены А. М. Нахушевым [2].

Теорема 1. *Пусть коэффициенты системы удовлетворяют одному из следующих условий:*

1) $k(0) \neq 0$ *или матрица* $a(x, 0)$ *положительно определена при* $0 \leqslant x \leqslant 1$;

2) a/k, $(b - A_y)^2/k \in C(G)$, *матрица* $c(x, 0)$ *отрицательно определена при* $0 \leqslant x \leqslant 1$;

3) a/k, $(b - A_y)^2/k$, c/k, $a_x/k \in C(\bar{G})$;

4) $(b - A_y)^2/\varphi_a \in C(G)$, *матрица* $a(x, y)$ *положительно определена при* $y \neq 0$, *а матрица* $c(x, 0)$ *отрицательно определена при* $0 \leqslant x \leqslant 1$;

5) $(b - A_y)^2/\varphi_a$, c/k, $c_x/k \in C(\bar{G})$, *матрицы* $a(x, y)$ *и* $a_x(x, y)$ *положительно определены при* $y \neq 0$, *где* $\varphi_a(x, y)$ — *некоторая функция, зависящая от элементов матрицы* $a(x, y)$.

Тогда имеет место априорная оценка вида

$$\|u\|^{++}_{W_2^1(G)} \leqslant c\,\|Lu\|_0^+ \qquad \forall u \in W(D_j), \tag{2}$$

где $\|\cdot\|^{++}$, $\|\cdot\|^{+}$ — *некоторые позитивные нормы, а* c — *не зависящая от вектора* $u(x, y)$ *положительная постоянная.*

Доказательство. Введем оператор

$$L_\mu v \equiv A v_{yy} - k(y) A v_{xx} + a_\mu v_x + b v + c_\mu v,$$

где $\mu = \mathrm{const} < 0$, $a_\mu = a - 2\mu k(y)\cdot A$, $c_\mu = c + \mu a - k(y)\mu^2 A$.

Очевидно, что если $u = v\exp(\mu x)$, $u \in W(D_j)$, то $Lu = \exp(\mu z) L_\mu v$ и $v \in W(D_j)$. Для функции $\beta(x) = \exp(\alpha x)$ и $v \in W(D_j)$ справедливо тождество

$$2(\beta v_x, L_\mu v)_0 = \int_G \beta\,[v_x M v_x + v_y N v_y + 2 v_x (b - A_y) v_y]\,dG + \int_G \beta v R v\,dG +$$

$$+ \int_{AC} \beta(-x_n) v c_\mu v\,ds + \int_{AC} \beta\,[1 + k(y)]\,(-x_n) v_s A v_s\,ds = \sum_{j=1}^{4} J_j, \tag{3}$$

где x_n и y_n — направляющие косинусы внешней номали $n = (x_n, y_n)$ к границе области G, а матрицы M, N, R определяются равенствами

$$M = 2a + k(y)\,[(\alpha - 4\mu)A + A_x], \qquad N = \alpha A + A_x,$$

$$R = \alpha[k(y)\mu^2 A - \mu a - c] + [k(y)\mu^2 A_x - \mu a_x - c_x].$$

Поскольку матрица A положительно определена в $\bar{G}$ и $x_n < 0$ на AC, то $J_4 \geqslant 0$ $\forall v \in W(D_j)$. Из (3) и простого неравенства $2b\xi_1\xi_2 \geqslant -\varepsilon b^2\xi_1^2 - \frac{1}{\varepsilon}\xi_2^2$, справедливого для любого $\varepsilon > 0$, имеем

$$\int_G \beta\left[v_x M v_x + v_y N v_y - \varepsilon\left(b_{ik} - \frac{\partial A_{ik}}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)^2 - \frac{m}{\varepsilon}\left(\frac{\partial v_k}{\partial y}\right)^2 + v\,Rv\right] dG \leqslant$$

$$\leqslant 2\,|(\beta v_x, L_\mu v)_0| - J_3 \leqslant c\,\|\omega^{-1/2} L_\mu v\|_0^2 + \varepsilon\,\|v_x \sqrt{\beta\omega}\|_0^2 - J_3, \tag{4}$$

где $\omega(x, y)$ — любая неотрицательная функция из класса $C(\bar{G})$, а $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $L_2(G)$. Здесь и ниже C означает некоторую положительную постоянную, которая не зависит от v.

Введем позитивные нормы по формулам

$$\|v\|^{++}_{1,\varphi,\psi} = \left[\int_G (\varphi v_x^2 + v_y^2 + \psi v^2)\,dG\right]^{1/2}, \quad \|v\|^{++}_{1,\varphi,1} \equiv \|v\|^{++}_{1,\varphi},$$

$$\|v\|^{+}_{0,\varphi} = \left(\int_G \varphi^{-1} v^2\,dG\right)^{1/2}, \quad \|v\|^{+}_{0,1} \equiv \|v\|^{+}_0.$$

Пусть соблюдается условие 1 теоремы, например, матрица $a(x, y)$ при $y=0$ положительно определена, тогда найдется такое число $\mu<0$, что матрица $-\mu a-c$ также будет положительно определенной при $y=0$. В силу непрерывности элементов матрицы $-\mu a-c$ найдется такое $\delta<0$, что матрица $-\mu a-c$ будет положительно определенной для всех $(x, y)\in\in\bar{G}\cap(\delta\leqslant y\leqslant 0)$. Поскольку $k(y)>0$ при $y<0$, то существует такое не зависящее от a число μ_0, что при $\mu\leqslant\mu_0$ матрицы M и $-c_\mu=-\mu a-c+k(y)\mu^2A$ будут положительно определенными для всех $(x, y)\in\bar{G}$. Поэтому существуют положительные числа λ_1 и λ_2, зависящие от μ_0 и от матрицы M и c_μ соответственно, что для любых вещественных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ справедливы неравенства

$$[-\mu a_{ik}-c_{ik}+k(y)\mu^2A_{ik}]\,\xi_i\xi_k\geqslant\lambda_1(\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_m^2),$$
$$M_{ik}\xi_i\xi_k\geqslant\lambda_2(\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_m^2)\quad\forall(x, y)\in\bar{G}. \tag{5}$$

Найдется такое число $\varepsilon>0$, зависящее от μ_0, что для него имеет место неравенство

$$\lambda_1-\varepsilon[(b_{ik}-\partial A_{ik}/\partial y)^2+1]\geqslant\sigma_i>0\quad\forall(x, y)\in\bar{G}, \tag{6}$$

где $\sigma_i\equiv\text{const}$, $i=1, 2, \dots, m$.

Существует такое число $\alpha>0$, зависящее от μ_0 и ε, что матрицы R и N будут положительно определенными и найдутся такие положительные числа λ_3 и λ_4, зависящие от элементов матрицы R и N соответственно, что имеют место неравенства

$$R_{ik}\xi_i\xi_k\geqslant\lambda_3(\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_m^2),\quad \lambda_4-m/\varepsilon\geqslant\gamma>0. \tag{7}$$

Принимая во внимание (5), (6) и (7), из (4) при $\omega=1$ получаем энергетическое неравенство

$$\|v\|_1^{++}\leqslant c\|L_\mu v\|_0^+\quad\forall v\in(D_j). \tag{8}$$

В случае $k(0)\neq 0$, когда система (1) строго гиперболична, анлогично, но еще проще доказывается априорная оценка (2).

При соблюдении условий 2 и 3 теоремы аналогичными рассуждениями при $\omega=k(y)$, получаются априорные оценки

$$\|v\|_{1,k}^{++}\leqslant c\|L_\mu v\|_{0,k}^+,\quad |v|_{1,k,k}^{++}\leqslant c\|L_\mu v\|_{0,k}^+\quad\forall v\in(D_j)$$

соответственно.

Если выполнено условие 4 и 5 теоремы, то аналогично убеждаемся в том, что $\forall v\in W(D_j)$, $\|v\|_{1,\varphi_a}^{++}\leqslant c\|L_\mu v\|_{0,\varphi_a}^+$ и $\|v\|_{1,\varphi_a,k}^{++}\leqslant c\|L_\mu v\|_{0,\varphi_a}^+$ соответственно, где φ_a — некоторая неотрицательная функция, зависящая от элементов матрицы a.

Таким образом, завершается доказательство теоремы.

Из доказанной теоремы следует единственность регулярного решения задачи Дарбу и существование слабого решения сопряженной задачи в функциональных пространствах, соответствующих априорной оценке.

Если правая часть сопряженной системы (1*) из $L_{2,\omega}(G)$, то можно показать, что слабое решение задачи (1*) — (D_j*) из $W_{2,\omega}^1(G)$, а если выполнено условие $(A_y-b)|_{y=0}=0$, то и слабое решение задачи (1*) — (D_2*) из $W_{2,\omega}^1(G)$. Пусть $v\in L_2(G)$ — слабое решение задачи (1*) — (D_1*). Положим

$$u(x, y)=\int_{x_1}^{x}e^{-\alpha x}v(t, y)\,dt,\quad x_1=1-\int_y^0\sqrt{k(t)}\,dt,$$

тогда, очевидно, что $u|_{AB}=0$, $u|_{BC}=0$ и $e^{\alpha x}u_x=v(x, y)$. Так как $(u, L^*v)_0=(v, Lu)_0=(e^{\alpha x}u_x, Lu)_0$ $\forall u\in W(D_1)$, тогда в силу доказанной теоремы имеем

$$(\|u\|_{1,\omega}^{++})^2\leqslant c\,|(e^{\alpha x}u_x, Lu)_0|\leqslant c\,|(u, L^*v)_0|\leqslant c\|u\|_{1,\omega}^{++}\|L^*v\|_{-1,\omega}^{+}.$$

Следовательно, $\|v\|_{0,\omega}^{++}\leqslant c\|u\|_{1,\omega}^{++}\leqslant c\|L^*v\|_{-1,\omega}^{+}$.

Если $L^*v\in L_{2,\omega}(G)$, то, очевидно, из последнего неравенства

$$\|v\|_{1,\omega}^{++}\leqslant c\|L^*v\|_{0,\omega}^{+}.$$

Если $(A_y-b)|_{y=0}=0$, то аналогично получим для решения задачи $(1^*)-(D_2^*)$ априорную оценку $\|v\|_{1,\omega}^{++}\leqslant c\|L^*v\|_{0,\omega}^{+}$.

Следует отметить, что некоторые из условий теоремы являются существенными и их нарушение может привести даже к неединственности решения задачи Дарбу ([2], [3]).

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
26 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Бицадзе, Уравнения смешанного типа, М., 1959. [2] А. М. Нахушев, ДАН, 195, № 4 (1970). [3] Т. Ш. Кальменов, Дифференциальные уравнения, 7, № 2 (1971). [4] М. И. Смирнов, Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, М., 1966.