

Н. С. СТЕПАНОВ, В. Г. ГАВРИЛЕНКО

К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СЛАБОНЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛАЗМЕ

(Представлено академиком А. В. Гапоновым-Греховым 4 V 1971)

Распространение электромагнитных волн в слабонестационарной плазме обсуждалось в литературе в связи с возможностью преобразования их спектра и энергии; причем, как правило, решались одномерные задачи (см., например, ^(1, 2)). В настоящем сообщении рассматривается общий случай, когда параметры плазмы произвольно, но медленно зависят от времени и всех трех пространственных координат; при этом представляет интерес также эффект вращения плоскости поляризации волн.

Пусть внешнее магнитное поле отсутствует; пренебрегая тепловым движением и колебаниями ионов, будем исходить из следующей системы линеаризованных уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c} (N_s \mathbf{V} + N_0 \mathbf{v}), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla \right) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{V} &= \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \mathbf{B}] \right) - \mathbf{v} \mathbf{v}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla \right) N_s + \operatorname{div} (N_0 \mathbf{v}) + N_s \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь, как обычно, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — электрическое и магнитное поле в волне, e и m — заряд и масса электронов, c — скорость света, N_0 и $\mathbf{V}$ — медленно изменяющиеся составляющие концентрации и скорости дрейфа электронов (которые полагаются заданными), N_s и $\mathbf{v}$ — высокочастотные возмущения тех же величин, ν — эффективная частота столкновения электронов с тяжелыми частицами. Для краткости здесь отброшены члены $\sim \beta^2$ и выше ($\beta = V/c$).

Решение будем искать в виде

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^1 + \dots) e^{i\varphi}, \quad (2)$$

(аналогично представляем и другие величины); здесь $\mathbf{E}^k(\mathbf{r}, t)$ — «медленные» по сравнению с $e^{i\varphi}$ множители, $\mathbf{E}^k \sim \chi^k \mathbf{E}^0$, $\chi \sim (\omega \tau)^{-1} \sim (kL)^{-1} \sim \nu / \omega$ — «геометрический» малый параметр, где $\omega = \partial \varphi / \partial t$, $\mathbf{k} = -\operatorname{grad} \varphi$, τ и L — характерные временные и пространственные масштабы изменения параметров среды. Подставляя (2) в (1), нетрудно получить уравнения последовательных приближений. Из условия совместности системы уравнений для $\mathbf{E}_i^0$ прежде всего следует дисперсионное соотношение

$$(n^2 - \varepsilon)^2 [(1 - n\beta)^2 - \omega_p^2 / \omega^2] = 0, \quad (3)$$

где обозначено $n = ck / \omega$, $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$, $\omega_p^2(\mathbf{r}, t) = 4\pi e^2 N / m$.

Рассмотрим сначала первый корень уравнения (3) ($n^2 = \varepsilon$), который соответствует электромагнитным волнам. Двукратное вырождение этого корня означает существование двух линейно независимых решений. Вводя ортогональную систему векторов $\mathbf{n}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{b}$, в качестве этих решений можно взять

$$\mathbf{E}_1^0 = \Phi_1 \left[\mathbf{N} + \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} (\beta \mathbf{N}) \mathbf{n} \right], \quad \mathbf{E}_2^0 = \Phi_2 \left[\mathbf{b} + \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} (\beta \mathbf{b}) \mathbf{n} \right]. \quad (4)$$

Таким образом, при $\beta \neq 0$ волны не являются чисто поперечными. Существенно однако, что в выражение для показателя преломления скорость дрейфа не входит, т. е. нет «увлечения» волн при произвольной зависимости $N(\mathbf{r}, t)$, $V(\mathbf{r}, t)$.

В отличие от стационарных сред при изменении N во времени частота волн не остается постоянной и зависимость $\omega(\mathbf{r}, t)$ фактически является одной из искоемых переменных задачи. Необходимое для определения $\omega(\mathbf{r}, t)$ уравнение можно получить из соотношения $ck = \omega n^{(1, 2)}$; в данном случае ($n^2 = \varepsilon(\omega)$) оно может быть записано в виде

$$(\partial/\partial t + \mathbf{u}\nabla)\omega^2 = \partial\omega_p^2/\partial t, \quad (5)$$

где $\mathbf{u}$ — групповая скорость волн ($\mathbf{u} = c\mathbf{n}$).

Нестационарность среды приводит также к тому, что теперь не существует лучей в обычном смысле слова, а можно лишь говорить о «групповых» траекториях, описываемых трехмерными волновыми пакетами, протяженность которых мала по сравнению с L и τ . Уравнение этих траекторий можно записать как

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} + u^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{l} = \frac{1}{2n\omega^2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial s}\right) \omega_p^2, \quad (6)$$

где $\mathbf{l} = \mathbf{n}/n$ — единичный вектор, ds — элемент длины вдоль групповой траектории. Таким образом, преобразование частоты ω волнового пакета определяется зависимостью ω_p от времени, а искривление групповых траекторий — изменением ω_p в поперечном по отношению к $\mathbf{n}$ направлении. После интегрирования уравнений (5) и (6) легко находятся также волновой вектор $\mathbf{k} = \omega n c^{-1} \mathbf{l}$ и эйконал $\Phi = \int \omega dt$.

Для определения изменения амплитуды и поляризации волн необходимо рассмотреть систему уравнений относительно E_i^1 , которые оказываются неоднородными (левая часть их совпадает с уравнениями для E_i^0 , а в правую входят величины, содержащие производные E^0 , ω и $\mathbf{k}$ по t и $\mathbf{r}$ и частоту столкновений ν). Условия совместности этой системы сводятся к ортогональности соответствующих правых частей решения (4), где теперь за $\mathbf{N}$ и $\mathbf{b}$ удобно взять нормаль и бинормаль к групповой траектории $\mathbf{N} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial s} + u^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{l}$, $\mathbf{b} = [\mathbf{N}]$. Выразив $\Phi_{1,2}$ как $\Phi_1 = \Phi \cos \theta$, $\Phi_2 = \Phi \sin \theta$ и комбинируя эти условия, нетрудно вывести соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Phi^2}{\omega}\right) + \text{div} \left(\frac{\Phi^2}{\omega} \mathbf{u}\right) = -\nu(1 - \varepsilon) \frac{\Phi^2}{\omega}, \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} + u^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right) \theta = \frac{1}{T} + \frac{(\beta \mathbf{b})}{n\rho} - \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} (\mathbf{n} \text{ rot } \beta), \quad (8)$$

где ρ — радиус кривизны групповой траектории, T — радиус кручения.

Уравнение (7) фактически представляет собой теорему Пойнтинга, определяющую изменение амплитуды волны вдоль групповой траектории. В отсутствие столкновений ($\nu = 0$) из него следует сохранение числа квантов в волновом пакете, что согласуется с $(1, 2)$. Уравнение (8) описывает изменение поляризации волны; для неподвижной стационарной среды ($\beta = 0$, $\partial N/\partial t = 0$) оно совпадает с полученным в (3) . Отличие от стационарно движущейся среды ($N = N(\mathbf{r})$, $\beta = \beta(\mathbf{r})$) заключается лишь в том, что в левой части (8) фигурирует полная производная (для фиксированного волнового пакета). Последний член в (8) означает, что монотонное вращение плоскости поляризации возможно и в плазме с однородной концентрацией ($N = \text{const}$, $\rho = T = \infty$); в этом смысле вихревое движение среды эквивалентно действию слабого магнитного поля с гирочастотой $\omega_H = \text{rot } \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$.

Другой корень дисперсионного уравнения (3) ($n\beta = 1 \pm \omega_p/\omega$) описывает плазменные колебания, сносимые движением среды (групповая скорость этих волн равна скорости дрейфа $V(r, t)$). В локально сопровождающей системе отсчета частота колебаний равна ω_p и показатель преломления неопределенен; в лабораторной же системе частота ω произвольна, а составляющая n вдоль β оказывается фиксированной. Заметим, что при $\beta \neq 0$ поле этой волны не является строго потенциальным и $E \neq 0$. Уравнение переноса частоты плазменных волн имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V\nabla\right)\omega = \pm \beta \frac{\partial}{\partial t}(\omega_p \beta^{-1}),$$

откуда видно, что здесь также возможно накапливающееся возмущение частоты волнового пакета.

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
29 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. С. Степанов, ЖЭТФ, 53, № 6 (12), 2186 (1967). ² Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 14, № 4, 489 (1971).
³ С. М. Рытов, Тр. ФИАН СССР, 2, 1, 40 (1940).