Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 3

УДК 517.948.32:513.88.518 *МАТЕМАТИКА*

И. В. БОЙКОВ

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 10 VIII 1971)

В статье рассматривается приближенное решение сингулярных интегральных уравнений (с.и.у.) следующих видов:

$$K_1x\equiv a(t)x(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{x(\tau)\,d\tau}{\tau-t}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{h(t,\tau)x(\tau)}{|\tau-t|^\gamma}d\tau\equiv ax+bSx+Ix=f(t); \tag{1}$$

$$K_2x\equiv a(t)x(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{h(t,\tau)x(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t); \tag{2}$$

$$K_3x\equiv a(t)x(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{h(t,\tau,x(\tau))}{\tau-t}d\tau=f(t); \tag{3}$$

$\tau\in L$, $\tau=e^{i\sigma}$, $0\leqslant\sigma\leqslant2\pi$, $0\leqslant\gamma<1$. Предполагается, что операторы K_1 и K_2 имеют линейные обратные.

В случае $\gamma=0$ приближенное решение с.и.у. (1) методом коллокации изучено в [1, 2], а методом механических квадратур — в [3].

Введем пространства: $X_1=H_\beta$ — пространство функций, удовлетворяющих условию Гёльдера H_β с нормой $\|x\|=M(x)+H(x:\beta)=\max|x(t)|+\sup|x(t_2)-x(t_1)|/|t_2-t_1|^\beta$, $t_1\neq t_2$, $x\in H_\beta$; $X_2=L_2$ — пространство квадратично суммируемых функций со скалярным произведением $(f_1,f_2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_1(t)\overline{f_2(t)}\,ds$, $t=e^{is}$; $\tilde X_i=\left\{\sum_{k=-n}^{n}\alpha_kt^k\right\}$ — $(2n+1)$-мерное пространство полиномов степени не выше n с той же нормой, что и X_i, $i=1,2$.

Приближенное решение уравнений (1) — (3) ищется в виде полинома $\tilde x(t)=\sum_{k=-1}^{n}\alpha_kt^k$, коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются соответственно из систем уравнений

$$\tilde K_1x\equiv P[a\tilde x+bS\tilde x+\tilde I\tilde x]=P[f],\qquad \tilde I\tilde x=\frac{1}{2\pi i}\int_L P_\tau[h(t,\tau)d(t,\tau)\tilde x(\tau)]\,d\tau; \tag{4}$$

$$\tilde K_2\tilde x\equiv\bar P\left[a(t)\tilde x(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L P_\tau\left[\frac{h(t,\tau)\tilde x(\tau)}{\tau-t}\right]d\tau\right]=\bar P[f]; \tag{5}$$

$$\tilde K_3\tilde x\equiv\bar P\left[a(t)\tilde x(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L P_\tau\left[\frac{h(t,\tau,\tilde x(\tau))}{\tau-t}\right]d\tau\right]=\bar P[f]; \tag{6}$$

P ($\bar P$) — оператор проектирования на множество тригонометрических полиномов степени не выше n по узлам s_k ($\bar s_k$), $s_k=2k\pi/(2n+1)$, $\bar s_k=(2k\pi+\pi)/(2n+1)$, $k=0,\ldots,2n$; $d(t,\tau)=|\tau-t|^{-\gamma}$ при $|\sigma-s|\geqslant2\pi/(2n+1)$; $d(t,\tau)=|e^{is_1}-1|^{-\gamma}$ при $|\sigma-s|\leqslant2\pi/(2n+1)$, $t=e^{is}$, $\tau=e^{i\sigma}$.

1°. Обоснование вычислительной схемы (в. с.) (4). Вначале проведем обоснование в пространстве X_1 в предположении a, b,

$f \in H_\alpha$, $h(t, \tau) \in H_{\alpha,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\beta < \delta = \min\ (\alpha,\ 1-\gamma)$. Уравнения (1), (4) эквивалентны [1, 2] следующим:

$$K_1^{(1)} x \equiv Vx + Wx = y, \quad K_1^{(1)} \in [X_1 \mapsto X_1];$$
$$\widetilde{K}^{(1)}\widetilde{x} \equiv \widetilde{V}\widetilde{x} + \widetilde{W}\widetilde{x} = \widetilde{y}, \quad \widetilde{K}_1^{(1)} \in [\widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_1], \tag{7}$$

где $Vx = \psi^- x^+ - \psi^+ x^-$, $Wx = lIx$, $l = \psi^- / (a+b)$, $\widetilde{V}\widetilde{x} = P[V\widetilde{x}]$, $\widetilde{W}\widetilde{x} = l\widetilde{I}\widetilde{x}$, $\widetilde{y} = P[y]$, $y = lf$,

$$\psi(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\left[\ \ln\frac{a(\tau)-b(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)}\ \right] / (\tau - z)\right] d\tau\right\}.$$

Введем, следуя [1, 2], полином $\widetilde{\varphi}(t) = V_n\widetilde{x} + D_n[W\widetilde{x}]$, где $V_n\widetilde{x} = \psi_n^-\widetilde{x}^+ - \psi_n^+\widetilde{x}^-$, $D_n = E - T_n$, E — единичный оператор, ψ_n и $T_n[f]$ — полиномы наилучшего равномерного приближений степени n для функций ψ и f соответственно. Из результатов [4] и [5] следует, что * $\|K_1^{(1)}\widetilde{x} - \widetilde{\varphi}\| \leqslant A_1\|\widetilde{x}\| / n^{\delta-\beta}$. Оценим теперь **

$$\|PK_1^{(1)}\widetilde{x} - \widetilde{K}_1^{(1)}x\| \leqslant \left\| P\left[\frac{l}{2\pi i}\int_L h(t,\tau)\,[|\tau - t|^{-\gamma} - d(t,\tau)]\,\widetilde{x}(\tau)\,dt\right]\right\| +$$
$$+ \left\| P\left[\frac{l}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{is}, e^{i\sigma})\,d(e^{is}, e^{i\sigma})\,[\widetilde{x}(\sigma) - \bar{x}(\sigma)]e^{i\sigma}d\sigma\right]\right\| +$$
$$+ \left\| P\left[\frac{l}{2\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{s_k}^{s_{k+1}} [h(e^{is}, e^{i\sigma})\,d(e^{is}, e^{i\sigma})\,e^{i\sigma} - h(e^{is}, e^{is_k})\,d(e^{is}e^{is_k})\,e^{is_k}]\,\bar{x}(\sigma)\,d\sigma\right]\right\| \leqslant$$
$$\leqslant A_2\|\widetilde{x}\|\ln n / n^{\zeta} \quad (\zeta = \min(\delta - \beta, \beta)),$$

где $\bar{x}(\sigma)$ — ступенчатая функция, равная $x(s_k)$ в интервале $[s_k, s_{k+1})$.

Из полученных оценок и результатов [6] следует, что при n таких, что $q = A_4 \ln n / n^{\zeta} < 1$, система уравнений $\widetilde{K}_1^{(1)}\widetilde{x} = \widetilde{y}$ и, следовательно, (4) имеет единственное решение $\widetilde{x}^*$ и $\|\widetilde{x}^* - x^*\| \leqslant A_5 \ln n / n^{\zeta}$, где x^* — решение уравнения (1). Так как уравнения (4) и $\widetilde{K}_1^{(1)}\widetilde{x} = \widetilde{y}$ эквивалентны, то существует линейный оператор $\widetilde{K}_1^{-1}$ с нормой $\|\widetilde{K}_1^{-1}\| \leqslant A_6 \ln n$. В самом деле, $\|\widetilde{x}^*\| \leqslant \|(\widetilde{K}_1^1\ )^{-1}\|\|P[lP[f]]\| \leqslant A_7 \ln n\,\|P[f]\|$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть оператор K_1 имеет линейный обратный и a, b, h, $f \in H_\alpha$.*

Тогда при n таких, что $q = A_4 \ln n / n^{\zeta} < 1$ $(\zeta = \min(\alpha - \beta,\ 1 - \gamma - \beta,\ \beta))$, система уравнений (4) имеет единственное решение $\widetilde{x}^*$ и $\|x^* - \widetilde{x}^*\| \leqslant A_5 \ln n / n^{\zeta}$.

Теперь проведем обоснование вычислительной схемы (4) в пространстве X_2 в предположении, что выполняются условия a, b, h, $f \in C_{2\pi}$.

Введем уравнение

$$K_1^{(2)} x \equiv \widetilde{a}x + \widetilde{b}Sx + I_1x = f, \quad I_1x = \frac{1}{2\pi i}\int_L h(t,\tau)\,d^*(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau, \tag{8}$$

где $\widetilde{a} = T_m[a]$, $\widetilde{b} = T_m[b]$; $d^*(t, \tau) = |\tau - t|^{-\gamma}$ при $|\tau - t| \geqslant \rho$ $d^*(t,\tau) = \rho^{-\gamma}$ при $|\tau - t| < \rho$, $\rho > 0$ (см. ниже). При m таких, что $q_1 = A_8[\rho^{1-\gamma} + \omega(a;\ m^{-1}) + \omega(b;\ m^{-1})] < 1$, оператор $K_1^{(2)}$ имеет линейный обратный ***. Проведем теперь для уравнения (8) обоснование метода коллокации, который в операторной форме записывается как $\widetilde{K}_1^{(2)}\widetilde{x} \equiv P[K_1^{(2)}\widetilde{x}] = P[f] = \bar{f}$. Подзобно (1) и (4), уравнения (8) и $\widetilde{K}_1^{(2)}\widetilde{x} = \bar{f}$ представляются в эквивалентной форме

* Через A_i обозначаются постоянные, не зависящие от n.
** Известно [3], что $\|P\| \leqslant A_3 \ln n$.
*** $\omega(a)$ — модуль непрерывности функции a.

$$K_1^{(3)} x \equiv Vx + Wx = y, \quad K_1^{(3)} \in [X_2 \to X_2];$$
$$\tilde{K}_1^{(3)} \tilde{x} \equiv \tilde{V}\tilde{x} + \tilde{W}\tilde{x} = \tilde{y}, \quad \tilde{K}_1^{(3)} \in [\tilde{X}_2 \to \tilde{X}_2],$$
где V, $\tilde{V}$, W, $\tilde{W}$, y, $\tilde{y}$ имеют тот же вид, что и в формуле (7) (с заменой a, b, I на $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, I_1 соответственно).

Введем полином *
$$\tilde{\varphi}(t) = V_n\tilde{x} + (T_{[n/2]}[l]) \frac{1}{\pi i} \int_L T_{t\,[n/2]}[h(t,\tau)\, d^*(t,\tau)]\, \tilde{x}(\tau)\, d\tau.$$

Можно показать **, что $\| K_1^{(3)}\tilde{x} - \tilde{\varphi} \| \leqslant A_9 \left[\omega\left(h; \frac{1}{n}\right)/\rho^{2\gamma} + \frac{m^{1-\varepsilon}}{n^{1-\varepsilon}}\right] \| \tilde{x} \|$. Аналогичная оценка справедлива для $\| PK_1^{(3)}\tilde{x} - \tilde{\varphi} \|$. Из этих оценок и результатов работы ([6]) следует, что при n таких, что $q_2 = \max\{q_1, A_{10}[\omega(h; n^{-1}) \times \rho^{-2\gamma} + \frac{m^{1-\varepsilon}}{n^{1-\varepsilon}}]\} < 1$, оператор $\tilde{K}_1^{(3)}$ и, следовательно, $\tilde{K}_1^{(2)}$ имеет линейный обратный; причем $\| (\tilde{K}_1^{(3)})^{-1} \| \leqslant \| (K_1^{(3)})^{-1} \| / (1 - q_2) = A_{11}$ и $\| (\tilde{K}_1^{(2)})^{-1} \| \leqslant |l| \, \| (K_1^{(3)})^{-1} \| \leqslant A_{12}$.

Оценим теперь
$$\| \tilde{K}_1^{(2)} \tilde{x} - \tilde{K}_1\tilde{x} \| \leqslant |a - \tilde{a}| \, \| \tilde{x} \| + |b - \tilde{b}| \, \| S\tilde{x} \| +$$
$$+ \left\| P\left[\frac{1}{2\pi i} \int_L R_\tau [h(t,\tau)\, d^*(t,\tau)\, \tilde{x}(\tau)]\, d\tau\right] \right\| + \left\| P\left[\frac{1}{2\pi i} \int_L P_\tau [h(t,\tau)(d(t,\tau) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - d^*(t,\tau))\, \tilde{x}(\tau)]\, d\tau\right] \right\| \leqslant A_{13} \| \tilde{x} \| [\omega(a; m^{-1}) +$$
$$+ \omega(b; m^{-1}) + \omega(h; n^{-1})/\rho^{2\gamma} + \rho^{1-\gamma}], \quad R = E - P.$$

Полагая для определенности $m = n^{1/2}$ и $\rho = [\omega(h;\ n^{-1})]^{1/(1+\gamma)}$, убеждаемся, что справедлива

Теорема 2. *Пусть оператор K_1 имеет линейный обратный и a, b, h, $f \in C_{2\pi}$.*

Тогда при n таких, что
$$q = A_{14}[\omega(a;\ n^{-1/2}) + \omega(b;\ n^{-1/2}) + [\omega(h;\ n^{-1})]^{(1-\gamma)/(1+\gamma)}] < 1,$$
система уравнений (4) имеет единственное решение $\tilde{x}^*$ и справедлива оценка $\|x^* - \tilde{x}^*\| \leqslant A_{15}[q + \|Rf\|]$, $K_1x^* = f$.

2°. Обоснование в.с. (5). Уравнение (2) можно представить в виде $K_2x \equiv ax + bSx + I_2x = f$, где $b(t) = h(t, t)$, $I_2x = \frac{1}{\pi i} \int_L [h(t,\tau) - h(t,\ t)]x(\tau)d\tau / (\tau - t)$. Будем считать, что функции $a(t)$, $h(t,\ \tau)$ (по обеим переменным), $f(t)$ имеют r непрерывных производных, причем r-я производная удовлетворяет условию Гёльдера H_α, т. е. a, $f \in H_\alpha^{(r)}$, $h(t, \tau) \in H_{\alpha,\alpha}^{r,r}$. Обоснование в.с. (5) проводится в пространстве X_1 при $\beta < \alpha$.

Проведем обоснование метода коллокации для уравнения (2). Метод коллокации для этого уравнения записывается как $\tilde{K}_2^{(1)} \tilde{x} \equiv P[K_2\tilde{x}] = P[f] = \tilde{f}$. Точно так же, как в п. 1°, уравнения $K_2x = f$ и $\tilde{K}_2^{(1)} \tilde{x} = \tilde{f}$ представляются в виде эквивалентных уравнений $K_2^{(2)} x \equiv Vx + Wx = y$ и $\tilde{K}_2^{(2)} \tilde{x} \equiv \tilde{V}\tilde{x} + \tilde{W}\tilde{x} = \tilde{y}$, где $Wx = lI_2x$, $\tilde{W}\tilde{x} = P[lI_2\tilde{x}]$. Для обоснования метода коллокации вводится полином
$$\tilde{\varphi}(t) = V_n\tilde{x} + (T_{[n/2]}[l]) \frac{1}{\pi i} \int_L [\tilde{h}(t,\tau) - \tilde{h}(t,t)]\, \tilde{x}(\tau)\, d\tau/(\tau - t),$$
где $\tilde{h}(t,\tau) = T_{[n/2]t}T_{[n/2]\tau}[h(t,\tau)]$. Можно показать, что
$$\| K_2^{(2)}\tilde{x} - \tilde{\varphi} \| \leqslant A_{16} \ln^2 n \, \| \tilde{x} \| \, n^\beta [E_n(a) + E_n(b) + E_n^t(h) + E_n^\tau(h)],$$

* $[x]$ — целая часть x.

** Предполагается, что если функция $h(t,\ \tau)$ удовлетворяет условию H_η, то $\eta < \gamma$ при $\gamma > 0$; ε — произвольное число, $0 < \varepsilon < 1$.

где $E_n(a)$ — наименьшее уклонение тригонометрических полиномов степени n от функции a. Повторяя рассуждения п. 1^0, убеждаемся в существовании линейного обратного оператора $(\widetilde{K}_2^{(2)})^{-1}$ с нормой $\|(\widetilde{K}_2^{(2)})^{-1}\| \leqslant A_{17}\ln n$. Из справедливости тождества

$$\bar{P}\left[\int_L P_\tau[h(t,\tau)\tilde{x}(\tau)/(\tau-t)]\,d\tau\right] \equiv \bar{P}\left[\int_L P_\tau[h(t,\tau)\tilde{x}(\tau)]\,d\tau/(\tau-t)\right] \equiv$$

$$\equiv \bar{P}\left[\int_L P_\tau[h(t,\tau)]\,\tilde{x}(\tau)\,d\tau/(\tau-t)\right]$$

вытекает

Теорема 3. *Пусть оператор K_2 имеет линейный обратный.*

Тогда при n таких, что $q = A_{18}\ln^2 n[E_n(a) + E_n(b) + E_n^t(h) + E_n^\tau(h)] < 1$, система уравнений (5) *имеет единственное решение $\tilde{x}^*$ и справедлива оценка $\|x^* - \tilde{x}^*\| \leqslant A_{19}[q + \|Rf\|]$, где x^* — решение уравнения* (2).

Замечание 1. Конкретизируя $E_n(\varphi)$ для различных классов функций φ, получаем эффективные оценки погрешности: если $a,\ f \in H_\alpha^r$, $h(t,\tau) \in H_{\alpha,\alpha}^{r,r}$, то $q = A_{20}\ln^2 n/n^{r+\alpha-\beta}$ и $\|x^* - \tilde{x}^*\| \leqslant A_{21}\ln^2 n/n^{r+\alpha-\beta}$.

Замечание 2. Аналогичная теорема справедлива, если приближенное решение уравнения (2) ищется из системы уравнений

$$P\left[a(t)\tilde{x}(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L [P_\tau[h(t,\tau)]\,\tilde{x}(\tau)\,d\tau/(\tau-t)] - f(t)\right] = 0.$$

3^0. Обоснование в.с. (6). Будем считать, что $a(t),\ f(t) \in H_\alpha^r$, $h_u^1(t,\tau,u) \in H_{\alpha,\alpha,1}^{r,r,r}$. Обоснование проводится в пространстве X_1 ($\beta < \alpha/2$). При обосновании используется

Лемма 1*. *Пусть K — нелинейный оператор из B-пространства E в B-пространство F, имеющий производную Гато в окрестности точки x_0.*

Тогда, если выполнены условия: 1) $\|Kx_0\| \equiv \eta_0$; 2) *существует линейный оператор $[K'(x_0)]^{-1}$ с нормой B_0;* 3) в сфере $S\{x: \|x - x_0\| \leqslant B_0\eta_0/(1-q)\}$, $q < 1$, $\|K'(x_1) - K'(x_2)\| \leqslant q/B_0$, *то модифицированный метод Ньютона — Канторовича (м.м. Н. — К.) $x_{n+1} = x_n - [K'(x_0)]^{-1}Kx_n$ сходится к решению x^* уравнения $Kx = 0$ и справедлива оценка $\|x^* - x_n\| \leqslant B_0\eta_0 q^n/(1-q)$.*

Воспользовавшись предыдущей леммой и результатами п. 2^0, убеждаемся, что справедлива

Теорема 4. *Пусть уравнение* (3) *имеет в некоторой сфере S единственное решение x^*, существует линейный оператор*** $[K_3^1(x)]^{-1}$, $x \in S$, *и* $x^*(t), a(t), f(t) \in H_\alpha$, $h_u^1(t,\tau,u) \in H_{\alpha,\alpha,1}^{r,r,r}$.

Тогда при n таких, что $q = A_{22}\ln^6 n/n^{r+\alpha-2\beta} < 1$, система уравнений (6) *имеет такое решение $\tilde{x}^*$, что $\|x^* - \tilde{x}^*\| \leqslant A_{23}\ln^2 n/n^{r+\alpha-\beta}$.*

В заключение считаю своим долгом выразить искренною благодарность проф. Б. М. Гагаеву за внимание к работе.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
22 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Иванов, ДАН, **114**, № 5, 945 (1957). [2] В. В. Иванов, Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений, Киев, 1968. [3] Б. Г. Габдулхаев, ДАН, **179**, № 2, 260 (1968). [4] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949. [5] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962. [6] С. Н. Слугин, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 3, 235 (1960). [7] М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко и др., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969.

* Для доказательства леммы нужно несколько видоизменить доказательство леммы 19.1 из ([7]).

** $K_3'(x)$ — производная Гато оператора K_3x.