

В. М. ВЕРЖБИЦКИЙ, З. Б. ЦАЛЮК
ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ УСИЛЕННОГО МЕТОДА
НЬЮТОНА — КАНТОРОВИЧА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 4 III 1971)

Рассмотрим уравнение

$$P(x) = 0, \quad (1)$$

где P — дифференцируемый по Фреше оператор, действующий из множества M банахова пространства X в банахово пространство Y .

После основополагающих работ Л. В. Канторовича для решения уравнения (1) было предложено большое число итерационных методов вида

$$x_{n+1} = x_n + Q(x_n, [P'(x_n)]^{-1}), \quad (2)$$

где $Q(x, A)$ — некоторый оператор, действующий из $M \times [Y \rightarrow X]^*$ в X . В большинстве случаев найти оператор $[P'(x_n)]^{-1}$ не удастся и его заменяют некоторым аппроксимирующим оператором A_n .

Используем для нахождения A_n один шаг рассмотренного в ⁽¹⁻³⁾ метода $(k+1)$ -го порядка обращения оператора, причем за начальное приближение примем A_{n-1} . Таким образом, получим следующий аналог метода (2):

$$x_{n+1} = x_n + Q(x_n, A), \quad n \geq 0, \quad (3)$$

$$A_{n+1} = A_n \sum_{i=0}^k (I - P'(x_{n+1}) A_n)^i, \quad n \geq 0, \quad (4)$$

где x_0, A_0 — заданные элементы из M и $[Y \rightarrow X]$ соответственно, $k \geq 1$ — фиксированное целое число, I — тождественный оператор в Y .

Положим

$$B_n = I - P'(x_n) A_n.$$

Теорема. Пусть

а) $\|P'(x) - P'(y)\| \leq L\|x - y\|^\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, $x, y \in M$, $[P'(x)]^{-1}$ существует при $x \in M$ и $\sup_{x \in M} \| [P'(x)]^{-1} \| \leq C$;

б) справедливы следующие оценки (в предположении, что x_n при $n \geq 0$ определены):

$$\begin{aligned} \|Q(x_n, A_n)\| &\leq G_1(\|A_n\|, \|B_n\|, \|P(x_n)\|) \|P(x_n)\|, \\ \|P(x_{n+1})\| &\leq \|B_n\| \|P(x_n)\| G_2(\|A_n\|, \|B_n\|, \|P(x_n)\|) + \\ &+ \|P(x_n)\|^q G_3(\|A_n\|, \|B_n\|, \|P(x_n)\|), \end{aligned}$$

где $G_i(a, b, p)$ — неубывающие функции своих аргументов, а $q \geq 1$;

с) при некоторых $m \in [1, q]$, $k \geq \max \left\{ 1, \frac{m(m-1)}{\min(m-1, \alpha)} - 1 \right\}^{**}$

* $[Y \rightarrow X]$ — пространство линейных операторов, действующих из Y в X .

** При $m = 1$ считаем $k \geq 1$.

$$b_0 \geq \|B_1\| \quad (a_0 = C(1 + b_0), \quad p_0 = \|P(x_0)\|) \quad \text{и} \quad \text{выполнено условие (2)}$$

$$v = b_0 G_2(a_0, b_0, p_0) + p_0^{q-1} G_3(a_0, b_0, p_0), \\ [b_0 + L a_0 p_0^q G_1^a(a_0, b_0, p_0)]^{q-1} \leq \dots$$

$$S = \left\{ x : \|x - x_0\| \leq p_0 G_1(a_0, b_0, p_0) \left(1 - \frac{1}{1 - v} \right) \right\} = M.$$

Тогда процесс (3), (4), начатый с x_0, A_0 , позволяет определить x_n при всех $n \geq 0$, $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ является решением уравнения (1).

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq p_0 G_1(a_0, b_0, p_0) (1 - v^{m^n})^{-1} v^{1+m+\dots+m^{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Теорема сводит вопрос о сходимости аналога того или иного конкретного метода типа (2) к нахождению оценочных функций G_i , $i = 1, 2, 3$, и числа q . Последние могут быть найдены из заданного Q и разложения $P(x_{n+1})$ по формуле Тейлора в точке x_n . Рассмотрим, например, аналог метода Ньютона — Канторовича (4-7).

$$x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n).$$

Отсюда и из равенства

$$P(x_{n+1}) = P(x_n) + P'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \int_0^1 [P'(x_n + \tau(x_{n+1} - x_n)) - P'(x_n)](x_{n+1} - x_n) d\tau$$

легко найдем (предполагая, что выполнено условие а) теоремы)

$$G_1(a, b, p) = a, \quad G_2 = 1, \quad G_3 = L(1 + a)^{-1} a^{1+\alpha}, \quad q = 1 + \alpha.$$

Аналогично, если

$$\sup_{x \in M} \|P''(x)\| \leq L, \quad \|P''(x) - P''(y)\| \leq N \|x - y\|^\beta, \quad \beta \in (0, 1],$$

то для метода (ср. (8))

$$x_{n+1} = x_n - A_n P' [x_n + 1/2 A_n P(x_n)] A_n P(x_n)$$

можно положить

$$G_1 = a(1 + b + 1/2 L a^2 p), \quad G_2 = 2 + b + L a^2 p + 1/2 L G_1 a p,$$

$$G_3 = 1/4 L^2 a^3 p^{1-\beta} (a + G_1) + \frac{N a^{2+\beta}}{2^{1+\beta} (1 + \beta)} (1 + b) + \frac{N}{(1 + \beta)(2 + \beta)} C_1^{2+\beta},$$

$$q = 2 + \beta.$$

В заключение отметим, что если в (4) $k < \max \left\{ 1, \frac{m(m-1)}{\min(m-1, \alpha)} - 1 \right\}$, то при переходе от данного метода к его аналогу порядок сходимости метода может понизиться.

Кубанский государственный университет
Краснодар

Поступило
26 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ M. Altman, Pacific J. Math., **10**, № 4, 1107 (1960). ² W. V. Petryshyn, Proc. Am. Math. Soc., **16**, № 5, 893 (1965). ³ В. М. Вербжицкий, З. Б. Цалюк, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., **10**, № 1, 214 (1970). ⁴ Л. В. Канторович, ДАН, **59**, № 7, 1237 (1948). ⁵ С. Ульм, Изв. АН ЭССР, Физ., матем., **16**, № 4, 403 (1967). ⁶ О. Ваарманн, Изв. АН ЭССР, Физ., матем., **17**, № 4, 379 (1968); **18**, № 1, 14 (1969). ⁷ В. М. Вербжицкий, Сборн. работ аспирантов, в. 2, Краснодар, 1969, стр. 31. ⁸ М. Я. Бартиш, Сибирск. матем. журн., **10**, № 3, 488 (1969).