Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 3

УДК 62-50

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Р. ГАБАСОВ, Ф. М. КИРИЛЛОВА, В. В. КРАХОТКО

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 6 IX 1971)

1. Рассмотрим систему управления

$$D_\alpha(p)\,x(t) = Bx(t-h_1) + C\dot{x}(t-h_2) + \int_0^{h_3} R(s)\,x(t-s)\,ds + K_\beta(p)\,u(t). \qquad (1)$$

Здесь x — n-вектор, u — r-вектор, h_1, h_2, h_3 — положительные числа, $p \equiv d/dt$, $D_\alpha(p) = p^\alpha + A_1 p^{\alpha-1} + \ldots + A_{\alpha-1}p + A_\alpha$, $K_\beta(p) = K_0 p^\beta + K_1 p^{\beta-1} + \ldots + K_{\beta-1}p + K_\beta$, $\beta < \alpha$, $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$, B, C — постоянные $n\times n$-матрицы, $K_0, K_1, \ldots, K_\beta$ постоянные $n\times r$-матрицы,

$$R(s) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{m_i} R_{ij}\frac{s^j}{j!}\exp(a_i s),$$

R_{ij} — постоянные $n\times n$-матрицы, a_i, $i = 1, \ldots, l$, — постоянные числа.

Зададим начальные условия

$$x_0(\cdot) = \begin{cases} x(\theta) = \varphi(\theta), & -\max\{h_i,\ i = 1, 2, 3\} = -h \leqslant \theta < 0, \\ x^{(i)}(0) = x_0^i, & i = 0, 1, \ldots, \alpha-1, \end{cases} \qquad (2)$$

где $\varphi(\theta)$ — функция, непрерывная вместе с $\dot\varphi(\theta)$. Каждому управлению $u(t)$, $t \geqslant 0$, из класса $C^{(\beta)}$ соответствует единственное непрерывное решение $x(t)$, $t \geqslant 0$, уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2).

Состояние $x_0(\cdot)$ называется управляемым, если для любого n-вектора c найдутся управление $u(t)$, $t \geqslant 0$, и число t_1, $t_1 < \infty$, такие, что траектория $x(t)$ системы (1), соответствующая состоянию $x_0(\cdot)$ и управлению $u(t)$, удовлетворяет условию $x(t_1) = c$. Система (1), все начальные состояния которой управляемы, называется управляемой.

Ниже предлагаются критерии управляемости системы (1), выраженные через ее параметры.

2. Введем $n\times r$-матричную функцию $X_k(t)$ и $r\times r$-матричную функцию $U_k(t)$. Определим некоторые операции над этими функциями. Через Δ обозначим оператор сдвига по аргументу k: $\Delta X_k(t) = X_{k+1}(t)$. Пусть $\exp(\Delta h)$ — оператор сдвига по аргументу t: $\exp(\Delta h)X_k(t) = X_k(t+h)$. Отсюда

$$\Delta^{-1}X_k(t) = X_{k-1}(t), \quad \exp(-\Delta h)X_k(t) = X_k(t-h),$$

$$\frac{1}{(a-\Delta)^\nu}X_k(t) = (-1)^\nu \sum_{i=0}^{k-1} C_{i+\nu-1}^{\nu-1} a^i X_{k-1-i}(t)$$

(C_ω^δ — число сочетаний из ω элементов по δ).

Система (1) в традиционных обозначениях операционного исчисления имеет вид

$$D_\alpha(p)\,x(t) = B\exp(-ph_1)\,x(t) + Cp\exp(-ph_2)\,x(t) + $$
$$+ \int_0^{h_3} R(s)\exp(-ps)\,ds\,x(t) + K_\beta(p)\,u(t). \qquad (3)$$

Введем соответствия

$$x(t) \to X_k(t), \quad u(t) \to U_k(t), \quad p \to \Delta.$$

Тогда из (3) получается соотношение

$$D_\alpha(\Delta) X_k(t) = B \exp(-\Delta h_1) X_k(t) + C\Delta \exp(-\Delta h_2) X_k(t) + \int_0^{h_3} R(s) \exp(-\Delta s)\, ds\, X_k(t) + K_\beta(\Delta) U_k(t), \tag{4}$$

которое назовем определяющим уравнением системы (1).

Пусть $X_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, $t \in [0, mh]$, $m = 0, 1, \ldots$, — решение уравнения (4) с условиями

$$X_k(t) = 0, \quad k \leqslant 0 \quad \text{или} \quad t < 0,$$
$$U_0(0) = E_r, \quad U_k(t) = 0, \quad k \neq 0 \quad \text{или} \quad t \neq 0. \tag{5}$$

Определяющее уравнение (4) назовем невырожденным, если

$$\operatorname{rank}\{X_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, (n\alpha + r\beta)N,\ t \in [0, mh],\ m = 0, 1, \ldots, n\alpha + r\beta - 1\} = n, \tag{6}$$

где $N = \sum_{j=1}^{l} (m_j + 1) + 1$.

Теорема. *Для того чтобы система (1) была управляема, необходимо и достаточно, чтобы ее определяющее уравнение было невырождено.*

3. Переход от уравнения движения (1) к определяющему уравнению (4) можно осуществить и с помощью соответствий

$$x(t) \to X_k(t), \quad \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{\varepsilon-1}} x(s)\, ds\, ds_{\varepsilon-1} \ldots ds_1 \to X_{k-\varepsilon}(t),$$
$$\dot{x}(t) \to X_{k+1}(t), \qquad u(t) \to U_k(t),$$
$$\dot{u}(t) \to U_{k+1}(t),$$
$$x^{(\alpha)}(t) \to X_{k+\alpha}(t), \quad \ldots\ldots\ldots$$
$$\int_0^t x(s)\, ds \to X_{k-1}(t), \qquad u^{(\beta)}(t) \to U_{k+\beta}(t).$$

4. Пример. Для системы

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-2) \\ x_2(t-2) \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} s & \exp(s) \\ 2 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-s) \\ x_2(t-s) \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

определяющее уравнение имеет вид

$$X_{k+1}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X_k(t) =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X_k(t-2) + \int_0^1 \begin{bmatrix} s & \exp(s) \\ 2 & s^2 \end{bmatrix} \exp(-\Delta s)\, ds\, X_k(t) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U_k(t).$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} s & \exp(s) \\ 2 & s^2 \end{bmatrix} \exp(-\Delta s)\, ds =$$
$$= -\exp(-\Delta)\left\{ \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{1-\Delta} \begin{bmatrix} 0 & \exp(1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} +$$
$$+ \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{1-\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, уравнение для $X_k(t)$ имеет вид

$$X_{k+1}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X_k(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X_k(t-2) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} X_{k-1}(t) +$$
$$+ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X_{k-2}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X_{k-3}(t) - \begin{bmatrix} 1 & \exp(1) \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X_{k-1}(t-1) -$$
$$- \begin{bmatrix} 1 & \exp(1) \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X_{k-2}(t-1) - \begin{bmatrix} 0 & \exp(1) \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X_{k-3}(t-1) +$$
$$+ \sum_{i=3}^{k-1} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X_{k-1-i}(t) - \begin{bmatrix} 0 & \exp(1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X_{k-1-i}(t-1) \right\} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U_k(t).$$

Подсчитывая $X_k(t)$ при условиях (5), получаем

$$X_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$X_2(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_3(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, условие (6) выполняется, т. е. рассматриваемая система управляема.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина
Минск

Поступило
23 VIII 1971