

М. Л. ЛЕВИН, Р. З. МУРАТОВ

ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ МОМЕНТАХ ПЛАЗМЕННОГО СФЕРОИДА

(Представлено академиком А. В. Гапоновым-Грецовым 9 IV 1971)

Как известно ⁽¹⁾, описание взаимодействия плазменного сгустка с полем электромагнитной волны при квазистатических резонансах требует учета возможности возбуждения не только дипольного, но и высших электрических моментов. Для сгустков несферической формы, когда нет точного решения дифракционной задачи, теорию такого взаимодействия можно строить, опираясь на различные приближенные методы. В частности, для однородного плазменного сфероида в пренебрежении пространственной дисперсией можно легко найти спектр собственных частот сгустка, оставаясь в рамках квазистатической теории. Подход, связанный с привлечением энергетических соображений ⁽²⁾, позволяет столь же просто вычислить постоянные радиационного затухания мультипольных колебаний. Поэтому для приближенного решения задачи дифракции на сфероидальном сгустке, остается найти величины электрических мультипольных моментов сгустка при резонансе. Квазистатический метод их вычисления и излагается в настоящей работе.

Мультипольные электрические моменты сгустка однородной квазинейтральной плазмы создаются наведенными на его поверхности зарядами $\sigma = \mathbf{P}_n$, где $\mathbf{P}$ — вектор поляризации. Рассматривая для определенности сплюснутый сфероид, назовем его электрическими моментами величины

$$q_{lm} = (-i)^l \frac{(l-m)!}{(2l-1)!!} d^l P_l^m(i \operatorname{sh} \eta_0) \int \sigma(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) dS, \quad (1)$$

где η, θ, φ — сплюснутые сфероидальные координаты,

$$x = d \operatorname{ch} \eta \sin \theta \cos \varphi, \quad y = d \operatorname{ch} \eta \sin \theta \sin \varphi, \quad z = d \operatorname{sh} \eta \cos \theta,$$

а интегрирование ведется по поверхности $\eta = \eta_0$. При вырождении сфероида в шар наши определения величин q_{lm} совпадают с определениями моментов, принятыми в ⁽³⁾.

Если плазменный сфероид находится во внешнем электрическом поле $E e^{i\omega t}$ достаточно низкой частоты (так что размеры сгустка малы по сравнению с длиной волны $2\pi c/\omega$), то всюду в ближней зоне допустимо квазистатическое описание полей. Разлагая электрический потенциал по сфероидальным гармоникам как внутри, так и вне сгустка (вид этих гармоник приводился в ⁽²⁾), причем разложение вне сгустка должно включать наряду со слагаемыми, характеризующими структуру и силу заданного внешнего поля, и слагаемые, учитывающие деполяризацию сфероида, получим из граничных условий уравнение, связывающее сфероидальные гармоники поляризации $\mathbf{P}$ и векторов $\mathbf{E}^i$ и $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E}_{l,m}^i = \mathbf{E}_{l,m} - 4\pi \frac{\omega_{lm}^2}{\omega_0^2} \mathbf{P}_{l,m}, \quad (2)$$

где последний член есть, очевидно, деполяризующее поле. Формулы, выражающие собственные частоты ω_{lm} сфероидального сгустка через плазменную частоту ω_0 , приведены в ⁽²⁾.

Уравнение движения электронов в поле E^i с учетом соотношения (2) дает следующее уравнение для вектора поляризации P :

$$\ddot{P} + \nu \dot{P} + \sum_{l, m} \omega_{lm}^2 P_{l, m} = \frac{\omega_0^2}{4\pi} E, \quad (3)$$

где ν — эффективная частота соударений. Так как на границе сфероида $P_n = \sigma$, то из (3) сразу следует уравнение колебаний для поверхностной плотности заряда σ . Переходя далее от σ к q_{lm} в соответствии с формулой (1), окончательно получим динамическое уравнение вынужденных колебаний

$$\ddot{q}_{lm} + \bar{\nu} \dot{q}_{lm} + \omega_{lm}^2 q_{lm} = \frac{\omega_0^2}{4\pi} (-i)^l \frac{(l-m)!}{(2l-1)!!} d^l P_l^m (i \operatorname{sh} \eta_0) \oint E_n(\eta_0, \theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) dS, \quad (4)$$

связывающее электрические мультипольные моменты сгустка с внешним электрическим полем. Наряду с затуханием колебаний, обусловленным столкновениями, в уравнении (4) нетрудно учесть также и радиационное затухание, если положить $\bar{\nu} = \nu + 2\gamma_{lm}$, где постоянные γ_{lm} вычислены в (2). В случае вытянутого сфероида соответствующие формулы получаются из (1) — (4) путем замены $d \rightarrow id$, $\operatorname{sh} \eta \rightarrow -i \operatorname{ch} \eta$.

В качестве примера рассмотрим произвольно ориентированный сфероидальный сгусток в поле линейно поляризованной плоской волны свободного пространства.

Введем для описания положения сфероида углы θ_0 и ψ_0 . θ_0 — угол между осью z , направленной по оси вращения сфероида, и волновым вектором k падающей волны. Ось x расположим в плоскости векторов k и z_0 . Поляризация волны характеризуется тогда углом ψ_0 между направлениями вектора E и оси y .

Зависимость электрического вектора волны от координат представится таким образом в виде

$$E = E_0 (-x_0 \cos \theta_0 \sin \psi_0 + y_0 \cos \psi_0 + z_0 \sin \theta_0 \sin \psi_0) \times \exp(-ik(x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0)), \quad (5)$$

где x_0, y_0, z_0 — декартовы орты.

Фактическое вычисление мультипольных моментов q_{lm} легко произвести, подставив в (4) вытекающее из формулы (5) выражение для нормальной компоненты E_n на поверхности сфероида в сфероидальных координатах. Ввиду малости показателя ($kd \ll 1$) в экспоненте выражения (5), ее удобно представить в виде разложения по степеням kd . При этом величина момента q_{lm} будет определяться l -м членом разложения, т. е., как и должно быть, дипольный момент определяется величиной поля в окрестности тела, квадрупольный момент — величинами первых производных поля и т. д.

Окончательные формулы мы приведем для амплитудных значений декартовых компонент дипольного p и квадрупольного D_{ij} моментов, которые в случае сфероида, как и для шара, связаны с величинами q_{lm} соотношениями (3) *

$$\begin{aligned} q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z, & q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y), & q_{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} D_{zz}, \\ q_{21} &= -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (D_{xz} - iD_{yz}), & q_{22} &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (D_{xx} - 2iD_{xy} - D_{yy}). \end{aligned} \quad (6)$$

* Отметим, что величины q_{lm} комплексны не только вследствие формального использования в (1) комплексных сферических функций $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, но вообще говоря, и вследствие физических причин, связанных с фазовым сдвигом между колебаниями и вынуждающим полем E . Эти — формальную и физическую — стороны не следует смешивать при использовании формул (6).

В нашем случае

$$p_x = -\frac{VE_0}{4\pi} \frac{\omega_0^2 \cos \theta_0 \sin \psi_0}{\omega_{11}^2 - \omega^2 + i(\nu + 2\gamma_{11})\omega}, \quad p_y = \frac{VE_0}{4\pi} \frac{\omega_0^2 \cos \psi_0}{\omega_{11}^2 - \omega^2 + i(\nu + 2\gamma_{11})\omega},$$

$$p_z = \frac{VE_0}{4\pi} \frac{\omega_0^2 \sin \theta_0 \sin \psi_0}{\omega_{10}^2 - \omega^2 + i(\nu + 2\gamma_{10})\omega},$$
(7)

где V — объем сгустка.

Если частота волнового поля близка к какой-либо из частот квадрупольных колебаний и, кроме того, внутренние потери энергии малы по сравнению с потерями на излучение, то необходим учет квадрупольного момента, компоненты которого даются формулами

$$D_{xx} = \frac{iVE_0}{40\pi} k\omega_0^2 \sin 2\theta_0 \sin \psi_0 \left(\frac{3l_{\perp}^2}{\omega_{22}^2 - \omega^2 + i2\gamma_{22}\omega} + \frac{2l_{\parallel}^2 + l_{\perp}^2}{\omega_{20}^2 - \omega^2 + i2\gamma_{20}\omega} \right),$$

$$D_{yy} = -D_{xx} - D_{zz},$$

$$D_{zz} = -\frac{iVE_0}{20\pi} k\omega_0^2 \frac{2l_{\parallel}^2 + l_{\perp}^2}{\omega_{20}^2 - \omega^2 + i2\gamma_{20}\omega} \sin 2\theta_0 \sin \psi_0,$$

$$D_{xy} = -\frac{i \cdot 3VE_0}{20\pi} k\omega_0^2 \frac{l_{\perp}^2}{\omega_{22}^2 - \omega^2 + i2\gamma_{22}\omega} \sin \theta_0 \cos \psi_0,$$

$$D_{xz} = \frac{i \cdot 3VE_0}{20\pi} k\omega_0^2 \frac{l_{\parallel}^2 \cos^2 \theta_0 - l_{\perp}^2 \sin^2 \theta_0}{\omega_{21}^2 - \omega^2 + i2\gamma_{21}\omega} \sin \psi_0,$$

$$D_{yz} = -\frac{i \cdot 3VE_0}{20\pi} k\omega_0^2 \frac{l_{\parallel}^2}{\omega_{21}^2 - \omega^2 + i2\gamma_{21}\omega} \cos \theta_0 \cos \psi_0,$$
(8)

где $l_{\parallel}$ и $l_{\perp}$ — продольная и поперечная полуоси сфероида соответственно.

Формулы (7) и (8) позволяют найти эффективные поперечники плазменного сфероида и действующую на него силу радиационного давления при квазистатических резонансах (в том числе и при межмультипольном вырождении⁽¹⁾).

Радиотехнический институт
Москва

Поступило
7 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Б. Гильденбург, И. Г. Кондратьев, ЖТФ, 33, в. 3, 301 (1963).
² М. Л. Левин, Р. З. Муратов, ЖТФ, 38, в. 11, 1999 (1968). ³ Дж. Джексон, Классическая электродинамика, М., 1965. ⁴ М. Л. Левин, Р. З. Муратов, ЖТФ, 39, в. 9, 1712 (1969).