

В. М. МАКСИМОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ
РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ И ИХ
ПРИМЕНЕНИЕ

(Представлено академиком А. И. Колмогоровым 26 VII 1971)

1. За математическое ожидание или среднее значение для вероятностного распределения $\mu(\cdot)$ на прямой R_1 берется величина $M\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\mu(dx)$ если она существует. Для случайной величины ξ с распределением $\mu(\cdot)$ полагают $M\xi = M\mu$. Для независимых ξ_1 и ξ_2 имеет место $M\xi_1\xi_2 = M\xi_1 M\xi_2$. Функция M линейна относительно суммы случайных величин и $M\delta(x) = x$ для вырожденного распределения $\delta(x)$ в точке $x \in R_1$. Это главные свойства математического ожидания, обеспечивающие его практическую ценность.

Если бы для случайных величин, принимающих значения в компактной группе G , существовало математическое ожидание с подобными свойствами, то многие вероятностные и статистические результаты для R_1 можно было бы перенести на группу G . Однако выбор M на R_1 определяется линейностью R_1 , в то время как компактные группы не являются линейными пространствами. Поэтому введение среднего значения для мер на компактной группе не является столь очевидным и до настоящего времени не рассматривалось. В настоящей заметке мы дадим аксиоматическое определение математического ожидания для распределений на компактных группах и их конструктивное построение в наиболее интересных случаях.

2. Обозначим $\mathfrak{M}(G)$ совокупность всех борелевских вероятностных мер на G . $\mathfrak{M}(G)$ относительно композиций (умножения) мер является замкнутой и непрерывной полугруппой в слабой топологии. Пусть $\mathcal{E}(G)$ будет некоторой полугруппой мер из $\mathfrak{M}(G)$, обязательно содержащей все сосредоточенные меры на элементах G . В дальнейшем мы отождествляем элементы α , $\alpha \in G$, с мерами, сосредоточенными в α . Таким образом, если мера μ принадлежит $\mathcal{E}(G)$, то и все меры $\alpha\mu$, $\alpha, \beta \in G$, также принадлежат $\mathcal{E}(G)$.

Определение. Скажем, что полугруппа мер $\mathcal{E}(G)$, $\mathcal{E}(G) \subset \mathfrak{M}(G)$, на связной компактной группе G допускает математическое ожидание, если существует однозначная функция M , отображающая $\mathcal{E}(G)$ в G и удовлетворяющая следующим свойствам:

- a) $M\mu\nu = M\mu M\nu$ для любых μ, ν из $\mathcal{E}(G)$,
- b) $M\alpha = \alpha$ для любого $\alpha \in G$,
- c) $M\mu_n \rightarrow M\mu$ при $\mu_n \rightarrow \mu$ (слабо) для $\mu_n, \mu \in \mathcal{E}(G)$,
- d) $M\mu = e$, единице группы G , если мера $\mu \in \mathcal{E}(G)$ симметрична, т. е. если $\mu(B^{-1}) = \mu(B)$ для любого борелевского множества B .

Значение $M\mu \in G$ называется математическим ожиданием меры μ или ее средним значением. Если ξ — случайная величина со значениями из G и с распределением $\mu \in \mathcal{E}(G)$, то математическое ожидание величины ξ определим равным $M\mu$. Для независимых величин ξ_1, ξ_2 , в силу свойства a), имеет место равенство $M\xi_1\xi_2 = M\xi_1 M\xi_2$.

Из определения следует, что среднее значение вводится неоднозначно на группе G и его разнообразие определяется не только различными отображениями $\mathcal{E}(G)$ в G , но и выбором самой полугруппы $\mathcal{E}(G)$. Выбор полугруппы $\mathcal{E}(G)$ определяется целями исследования и, вообще говоря, не может быть произвольным. В частности, имеет место

Предложение 1. Если полугруппа $\mathcal{E}(G)$ допускает математическое ожидание и не изоморфна группе G , то $\mathcal{E}(G)$ не может быть замкнутой в $\mathfrak{M}(G)$.

3. Применим понятие математического ожидания для изучения сходимости произведения независимых и неодинаково распределенных случайных величин ξ_n , $n = 1, \dots$, принимающих значения из компактной группы G . Распределение случайной величины ξ_n обозначим μ_n . Предположим, что все меры μ_n принадлежат полугруппе $\mathcal{E}(G)$, определенной в предложении 2.

Предложение 2. Пусть полугруппа $\mathcal{E}(G)$ такова, что всякая мера $\gamma \in \mathfrak{M}(G)$ принадлежит $\mathcal{E}(G)$, если существует последовательность мер

$$\gamma_n \in \mathcal{E}(G), \text{ для которой } \prod_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \gamma \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \{1 - D(\gamma_n)\} < \infty.$$

Тогда для сходимости почти всюду произведения $\xi_1 \dots \xi_n$ необходимо и достаточно сходимости произведения $\prod_{n=1}^{\infty} M\xi_n$, ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \{1 - D(\xi_n)\}$.

(Здесь величина $D(\xi_n)$ обозначает дисперсию случайной величины ξ_n , определенной для полугруппы $\mathfrak{M}(G)$, см. по этому поводу ⁽¹⁾.)

Доказательство этого предложения опирается на результаты работы ⁽¹⁾ и принцип сходимости для распределений на компактных группах ⁽²⁾.

4. Для построения конкретных примеров математических ожиданий рассмотрим тот важный для приложений случай, когда полугруппа $\mathcal{E}(G)$ порождается некоторой единичной окрестностью мер в $\mathfrak{M}(G)$. В случае, когда M на таких $\mathcal{E}(G)$ существует, будем говорить, что группа G допускает математическое ожидание, или на группе G существует математическое ожидание (среднее значение мер). В частности, $\mathcal{E}(G)$ удовлетворяет условию предложения 2.

Обозначим $T(d_1)$ d_1 -мерный тор, $SU(2, d_2)$ — прямое произведение d_2 экземпляров группы $SU(2)$ — унитарной унимодулярной группы второго порядка. Имеет место следующий результат.

Предложение 3. Компактные группы G , допускающие математическое ожидание, могут быть только вида

$$(T(d_1), SU(2, d_2)).$$

Пусть группа G есть прямое произведение $(G_1, \dots, G_d)$. Если мера μ задана на G , то обозначим $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(d)}$ ее проекции на $G_1, \dots, G_d$. Предположим, что $\mathcal{E}(G)$ таково, что проекции мер $\mathcal{E}(G)$ входят соответственно в $\mathcal{E}(G_1), \dots, \mathcal{E}(G_d)$, для которых определено математическое ожидание $M_1, \dots, M_d$. Тогда отображение $M\mu = (M_1\mu^{(1)}, \dots, M_d\mu^{(d)})$ будет математическим ожиданием. Такое математическое ожидание мы будем называть проекционным относительно групп $G_1, \dots, G_d$ и средних $M_1, \dots, M_d$.

5. Перейдем к рассмотрению M на торах $T(d)$, которые мы будем записывать в виде $(\theta_1, \dots, \theta_d)$, $0 \leq \theta_i < 2\pi$, сложение покомпонентное по mod 2π .

Предложение 4. Каждое математическое ожидание M на $T(d)$ определяется некоторыми коэффициентами Фурье $\Phi_l(\cdot)$, $l = 1, \dots, \sigma$, и целочисленной матрицей $\gamma = \|\gamma_{\alpha\beta}\|$, $\alpha = 1, \dots, \sigma$; $\beta = 1, \dots, d$. Если коэффициент Фурье $\Phi_l(\cdot)$ соответствует характеру $\exp \{1(l)\theta_1 + \dots + d(l)\theta_d\}$, то целочисленные матрицы $\theta = \|j(l)\|$, $j = 1, \dots, d$, $l = 1, \dots, \sigma$, и γ связаны соотношением $\theta^* \gamma = E$. M для $\mu \in \mathcal{E}(T(d))$

$$M\mu = (\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)})\gamma,$$

где $\Phi(\mu) = r_i \exp \{i\theta^{(i)}\}$, $r_i > 0$, $\theta \leq \theta^{(i)} < 2\pi$.

Из предложения 4 следует, что область определения M , зависящего от коэффициентов Фурье $\Phi_l(\cdot)$, $l = 1, \dots, \sigma$, состоит из всех мер, у которых эти коэффициенты отличны от нуля. Всякая полугруппа $\mathcal{E}(T(d))$ такого вида допускает математическое ожидание при $\theta^*\gamma = E$.

Интересен случай, когда матрица θ размера $d \times d$. Если θ определяет $\mathcal{E}(T(d))$, то полугруппа $\mathcal{E}(T(d))$ допускает математическое ожидание тогда и только тогда, когда $\det \theta = \pm 1$. Это математическое ожидание единственно на $\mathcal{E}(T(d))$.

6. Определим на $SU(2)$ математическое ожидание M_0 следующим образом. Группа $SU(2)$ — это совокупность матриц $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, где α, β — комплексные числа, для которых $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Пусть мера μ определена на этом многообразии. Тогда положим

$$M_0\mu = \lambda^{-1} \int_{|\alpha|^2+|\beta|^2=1} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} d\mu, \quad \lambda = \left| \int_{|\alpha|^2+|\beta|^2=1} \alpha d\mu \right|^2 + \left| \int_{|\alpha|^2+|\beta|^2=1} \beta d\mu \right|^2.$$

Легко проверить, что M_0 удовлетворяет всем свойствам математического ожидания.

Предложение 5. На группе $SU(2, d)$ существует единственное математическое ожидание, которое является проекционным относительно каждой компоненты $SU(2)$ и M_0 .

Предложение 6. На группе $\{T(d_1), SU(2, d_2)\}$ всякое математическое ожидание является проекционным относительно групп $T(d_1)$ и $SU(2, d_2)$.

7. Отсутствие математического ожидания на конечных группах обедняет смысл этого понятия. Поэтому будем требовать от M на конечных группах выполнения лишь условий а), б), в) определения.

Обозначим $G_2(d)$, $d = 1, \dots$, группу, являющуюся прямым произведением d групп второго порядка $G_2 = G_2(1)$, с элементами e_1 — единица и e_2 , $e_2^2 = e_1$. Для $d = 0$ положим $G_2(0) = e_1$. Любую меру μ на G_2 можно представить в виде $\mu = pe_1 + qe_2$, $p, q \geq 0$, $p + q = 1$. Положим $M_1\mu = e_1$, если $p > q$; $M_1\mu = e_2$, если $p < q$. Легко проверить, что отображение M_1 будет математическим ожиданием на полугруппе мер $\mathfrak{M}(G) \setminus \{1/2e_1 + 1/2e_2\}$. В силу предложения 1, эта полугруппа мер оказывается наибольшей среди полугрупп, допускающих M . Оказывается, что M_1 является единственным средним значением на G_2 . Далее, для $G_2(0)$ имеем $\mathfrak{M}(G_2(0)) = e_1$. Поэтому положим $Me_1 = e_1$.

Предложение 7. Группы $G_2(d)$, $d = 0, \dots$, являются единственными классами конечных групп, для которых существует математическое ожидание. Группы $G_2(d)$, $d = 0, \dots$, допускают единственное математическое ожидание, являющееся проекционным относительно каждой компоненты G_2 и M_1 .

Таким образом, в случае несвязных компактных групп можно говорить лишь о математических ожиданиях для групп вида $\{G_2(d_1), T(d_2), SU(2, d_3)\}$.

В таких группах, на основе предложений 4, 5, 6, 7 будем рассматривать проекционное математическое ожидание относительно $G_2(d_1)$, $T(d_2)$, $SU(2, d_3)$.

8. Если группа мер $\mathcal{E}(G)$ допускает математическое ожидание и содержит единичную окрестность из $\mathfrak{M}(G)$, то математическое ожидание позволяет исследовать вопросы, связанные с обобщенной безграничной делимостью мер. см. (2). Характеризация таких мер и задача их вложения

в неоднородные полугруппы мер (гемигруппы) важны, но до настоящего времени мало исследованы.

Однако для групп, допускающих математическое ожидание, можно получить, в частности, следующий результат.

Предложение 8. *Всякая обобщенная безгранично делимая мера на группе $\{G_2(d_1), T(d_2), SU(2, d_3)\}$ вкладывается в некоторую гемигруппу мер.*

Институт химической физики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
3 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. М. Максимов, ДАН, 192, № 4, 732 (1970). ² В. В. Сазонов, В. Н. Тутубалин, Теория вероятн. и ее примен., 11, 1, 3 (1966).