

Л. Д. МДЗИНАРИШВИЛИ

О СВЯЗИ ГОМОЛОГИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ КОЛМОГорова И СТИНРОДА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 IX 1971)

Опираясь на работу ⁽¹⁾, в этой статье доказываем эквивалентность гомологической теории А. Н. Колмогорова ⁽²⁾, основанной на счетных фундаментальных системах, с теорией гомологии Н. Стинрода ⁽³⁾ на категории компактных метрических пар в случае дискретной группы коэффициентов.

А. Н. Колмогоров ⁽²⁾ ввел определения двух функциональных групп гомологии локально-компактного хаусдорфова пространства над компактной группой коэффициентов, одна из которых основана на фундаментальной системе, и доказал изоморфизмы этих групп. Г. С. Чогошвили ⁽⁴⁾ доказал изоморфизмы групп гомологии Колмогорова с группой гомологии П. С. Александрова ⁽⁵⁾ при помощи построенной им группы гомологии, основанной на конечных разбиениях пространства. Следовательно, для компактных метрических пространств группы гомологии Колмогорова и Стинрода над компактной группой коэффициентов изоморфны между собой, так как в этих условиях, как известно, группы гомологии Стинрода и Александрова — Чеха изоморфны.

Однако оказывается, что если определить группу Колмогорова над дискретной группой коэффициентов, то при помощи групп гомологии Чогошвили и формулы универсальных коэффициентов можно показать, что в случае счетных фундаментальных систем также имеет место изоморфизм с группой гомологии Стинрода. Тем самым показывается в частности, что теория Колмогорова, так же как и теория Стинрода, на категории компактных метрических пространств является точной теорией не только в случае компактной, но и в случае дискретной группы коэффициентов.

Так как во всей работе мы будем рассматривать либо категорию $\mathcal{A}_c$ компактных пар, либо категорию $\mathcal{A}_{cm}$ компактных метрических пар пространств и дискретную группу коэффициентов G , то определения группы гомологии Колмогорова будут приведены с учетом рассматриваемых категорий и группы коэффициентов, т. е. пренебрегая топологией группы гомологии и вопросом о компактности замыканий множеств.

Пусть $(X, A) \in \mathcal{A}_c$. Разбиением компактного пространства X будем называть совокупность $D_\alpha = \{e_i^\alpha\}$ конечного числа подмножеств e_i^α пространства X , попарно непересекающихся и в сумме дающих все пространство, $X = \bigcup e_i^\alpha$.

Систему $S = \{D_\alpha\}$ конечных разбиений D_α назовем фундаментальной, если выполняются условия:

- 1) пересечение $D_\alpha \wedge D_\beta = \{e_i^\alpha \cap e_j^\beta\}$ принадлежит S ;
- 2) для любого внешнего конечного открытого покрытия $\{U_i\}$ произвольного компакта $A \subset X$ существует разбиение $D_\alpha \in S$ такое, что каждый элемент из D_α , имеющий пересечение с A , содержится в некотором U_i .

Совокупность объединений всевозможных конечных наборов элементов из различных разбиений $D_\alpha \in S$ образует тело множеств $T(S)$ ⁽²⁾.

Каждой упорядоченной системе $n + 1$ элементов $e_0, \dots, e_n$ тела $T(S)$ ставится в соответствие однозначно определенный элемент $f_n(e_0, \dots, e_n)$ абелевой группы G . При этом требуется, чтобы функция f_n удовлетворяла следующим условиям:

K1) f_n остается без изменения при четной перестановке аргументов и меняет знак при нечетной их перестановке; кроме того, $f_n = 0$, если два аргумента совпадают;

K2) если $e_i = e_i' \cup e_i''$, причем $e_i' \cap e_i'' = \phi$, то

$$f_n(e_0, \dots, e_i, \dots, e_n) = f_n(e_0, \dots, e_i', \dots, e_n) + f_n(e_0, \dots, e_i'', \dots, e_n);$$

K3) если $\bigcap_{i=0}^n \bar{e}_i = \phi$, то $f_n(e_0, \dots, e_n) = 0$.

Сумма $f_n + f_n'$ двух функций f_n и f_n' определяется равенством

$$(f_n + f_n')(e_0, \dots, e_n) = f_n(e_0, \dots, e_n) + f_n'(e_0, \dots, e_n).$$

Ясно, что совокупность всех n -мерных функций f_n представляет абелеву группу, которую мы обозначим через $C_n(X, T(S), G)$.

Так как $X \in T(S)$, то граница определяется так:

$$\Delta f_n(e_0, \dots, e_{n-1}) = f_n(X, e_0, \dots, e_{n-1}).$$

Мы скажем, что функция $f_n \in C_n(X, T(S), G)$ лежит на A , если каждой упорядоченной системе $e_0, \dots, e_n$, где $e_i \in T(S)$ и $\bigcap_{i=0}^n (e_i \cap A) = \phi$, ставится в соответствие $f_n(e_0, \dots, e_n) = 0$.

Обозначим через $Z_n(X, A, T(S), G)$ группу относительных циклов, т. е. таких $f_n \in C_n(X, T(S), G)$, границы которых лежат на A . Относительный цикл f_n будем называть ограничивающим, если существует такая функция $f_{n+1} \in C_{n+1}(X, T(S), G)$, что функция $\Delta f_{n+1} - f_n$ лежит на A . Группу ограничивающих циклов обозначим через $B_n(X, A, T(S), G)$. Факторгруппу $H_n(X, A, T(S), G) = Z_n(X, A, T(S), G) / B_n(X, A, T(S), G)$ назовем n -мерной группой гомологии Колмогорова пары (X, A) над G , основанной на S .

Если $S = \{D_\alpha\}$ — фундаментальная система пространства X , то очевидно, что система $A \wedge S = \{A \wedge D_\alpha\}$, где $A \wedge D_\alpha = \{A \cap e_i^\alpha\}$, является фундаментальной для $A \subset X$.

Теорема 1. Для групп гомологии Колмогорова пары $(X, A) \in \mathcal{A}_c$ над абелевой группой G имеет место точная последовательность

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \overset{K}{H}_n(A, T(A \wedge S), G) \rightarrow \overset{K}{H}_n(X, T(S), G) \rightarrow \\ \rightarrow \overset{K}{H}_n(X, A, T(S), G) \rightarrow \overset{K}{H}_{n-1}(A, T(A \wedge S), G) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Построим теперь новую группу гомологии, основанную на той же фундаментальной системе S . Симплициальный спектр $\{X_\alpha, \pi_{\beta\alpha}\}$, порожденный системой S , где X_α — нерв разбиения $D_\alpha \in S$, а $\pi_{\beta\alpha}: X_\beta \rightarrow X_\alpha$ — симплициальное отображение при $D_\alpha < D_\beta$ (¹), обладает тем преимуществом, что позволяет определить цепи на всем пространстве. В самом деле, в комплексе $X_\alpha \vee D_\alpha \in S$ выделим замкнутый подкомплекс A_α' , состоящий из таких симплексов $\sigma_n = (e_{i_0}^\alpha, \dots, e_{i_n}^\alpha)$, что $\bigcap_{k=0}^n (e_{i_k}^\alpha \cap A) = \phi$. Ясно, что нерв A_α разбиения $A \wedge D_\alpha$ изоморфен подкомплексу A_α нерва X_α . Поэтому мы можем отождествить цепной комплекс $C_*(A_\alpha, G)$ с подкомплексом цепного комплекса $C_*(X_\alpha, G)$. Обозначим $C_*(X_\alpha, A_\alpha, G) = C_*(X_\alpha, G) / C_*(A_\alpha, G)$ и определим цепной комплекс $C_*(X, A, S, G)$ как обратный предел комплексов $C_*(X_\alpha, A_\alpha, G)$.

Группу гомологии $H_n(X, A, S, G)$ комплекса $C_*(X, A, S, G)$ будем называть группой гомологии Чогошвили пары (X, A) , основанной на S .

Лемма 1. Для любого компактного метрического пространства существует счетная фундаментальная система.

Теорема 2. Группа гомологии Колмогорова изоморфна группе гомологии Чогошвили пары $(X, A) \in \mathcal{A}_{\text{см}}$, основанной на счетной фундаментальной системе S , т. е.

$$\overset{\text{К}}{H}_n(X, A, T(S), G) \approx H_n(X, A, S, G).$$

Пусть $(X, A) \in \mathcal{A}_{\text{см}}$ и S — фундаментальная система. Каждому разбиению $D_\alpha \in S$ поставим в соответствие коцепный комплекс $C^*(X_\alpha, A_\alpha)$, где $C^n(X_\alpha, A_\alpha)$ — подгруппа группы n -мерных целочисленных коцепей перва X_α , состоящая из всех коцепей, которые обращаются в нуль на симплексах из A_α . Обозначим через $C^*(X, A, S)$ прямой предел комплексов $C^*(X_\alpha, A_\alpha)$ по всем $D_\alpha \in S$.

Лемма 2. Для любой фундаментальной системы S пары $(X, A) \in \mathcal{A}_{\text{см}}$ комплекс $C_*(X, A, S, G)$ изоморфен комплексу $\text{Hom}(C^*(X, A, S), G)$.

Лемма 3. Для любой счетной фундаментальной системы S пары $(X, A) \in \mathcal{A}_{\text{см}}$ комплекс $C^*(X, A, S)$ состоит из свободных абелевых групп.

Теорема 3. Группа когомологии $H^n(X, A, S, G)$ комплекса $C^*(X, A, S, G)$, основанная на фундаментальной системе S , изоморфна когомологической группе Александера — Чеха $\check{H}^n(X, A, G)$ пары $(X, A) \in \mathcal{A}_{\text{см}}$.

Опираясь на теоремы 2, 3, леммы 2, 3, а также на теорему 4.1 из (6), гл. 3, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4. Для групп гомологии Колмогорова $\overset{\text{К}}{H}_n(X, A, T(S), G)$ пары $(X, A) \in \mathcal{A}_{\text{см}}$ над G , основанных на счетной фундаментальной системе S , имеет место формула универсальных коэффициентов (распадающаяся в прямую сумму)

$$0 \rightarrow \text{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G) \rightarrow \overset{\text{К}}{H}_n(X, A, T(S), G) \rightarrow \text{Hom}(\check{H}^n(X, A), G) \rightarrow 0.$$

Теорема 5. Группы гомологии Колмогорова пары $(X, A) \in \mathcal{A}_{\text{см}}$, основанные на различных счетных фундаментальных системах, изоморфны между собой, т. е. если S и S' — две счетные фундаментальные системы, то

$$\overset{\text{К}}{H}_n(X, A, T(S), G) \approx \overset{\text{К}}{H}_n(X, A, T(S'), G).$$

Пусть $f: (X, A) \rightarrow (Y, X)$, а S, S' — счетные фундаментальные системы пространств Y и X соответственно. Обозначим через S^* счетную фундаментальную систему пространства X , полученную пересечением разбиений из S' и S^{-1} с одинаковыми индексами, где $S^{-1} = \{f^{-1}D_\alpha\}$, $D_\alpha \in S$. Пусть $f_n \in C_n(X, T(S^*), G)$ и $e_0, \dots, e_n$ — упорядоченная система элементов тела $T(S)$. Возьмем разбиение $D_\alpha \in S$, являющееся пересечением тех разбиений из S , из элементов которых образуются e_i , $i = 0, \dots, n$. Тогда каждый элемент $e_{\alpha}^* \in D_{\alpha}^* = D_{\alpha}' \wedge f^{-1}D_\alpha$ удовлетворяет условию $fe_{\alpha}^* \cap e_i \neq \emptyset \Rightarrow fe_{\alpha}^* \subset e_i$, $i = 0, \dots, n$. Поэтому, полагая

$$\bar{f}f_n(e_0, \dots, e_n) = \sum f_n(e_{j_0}^*, \dots, e_{j_n}^*),$$

где $fe_{j_i}^* \subset e_i$, $i = 0, \dots, n$, получим функцию $\bar{f}f_n \in C_n(Y, T(S), G)$, а следовательно, определим гомоморфизм $\bar{f}: C_n(X, T(S^*), G) \rightarrow C_n(Y, T(S), G)$, перестановочный с граничным оператором и индуцируемый

$$f_*: \overset{\text{К}}{H}_n(X, T(S^*), G) \rightarrow \overset{\text{К}}{H}_n(Y, T(S), G).$$

В силу теоремы 5, определим гомоморфизм

$$f_*: \overset{\text{К}}{H}_n(X, A, T(S'), G) \approx \overset{\text{К}}{H}_n(X, A, T(S^*), G) \rightarrow \overset{\text{К}}{H}_n(Y, B, T(S), G).$$

В (1) доказывается теорема единственности для теории гомологии на категории $\mathcal{A}_{\text{см}}$, удовлетворяющей, помимо семи аксиом Эйленберга — Стиррода, еще двум аксиомам. В качестве этих аксиом взяты следующие утверждения.

Аксиома 8. Если $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — отображение, принадлежащее категории $\mathcal{A}_{\text{см}}$, гомеоморфно отображает $X \setminus A$ на $Y \setminus B$, то гомоморфизм f_* между группами гомологии пар (X, A) и (Y, B) , индуцированный f , является изоморфизмом.

Аксиома 9. Если компактное метрическое пространство X является объединением счетного числа компактных пространств $X_1, X_2, \dots$, пересекающихся попарно в единственной точке x_0 , диаметры которых стремятся к нулю, то группа гомологии пары (X, x_0) естественно изоморфна прямому произведению групп гомологии пар (X_i, x_0) .

Теорема 6. Теория гомологии Колмогорова, основанная на счетных фундаментальных системах и определенная на категории $\mathcal{A}_{\text{см}}$, удовлетворяет семи аксиомам Эйленберга — Стиррода, а также двум приведенным аксиомам Милнора.

Кроме того, для любой точной тройки коэффициентов

$$0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$$

имеет место точная последовательность

$$\dots \rightarrow H_n^K(X, A, T(S), G') \rightarrow H_n^K(X, A, T(S), G) \rightarrow H_n^K(X, A, T(S), G'') \rightarrow \dots$$

При доказательстве этой теоремы существенно используется формула универсальных коэффициентов, полученная в теореме 4.

В силу теоремы 6 и упомянутой выше теоремы единственности Милнора имеет место следующая

Теорема 7. На категории $\mathcal{A}_{\text{см}}$ компактных метрических пар пространств теория гомологии Колмогорова эквивалентна теории Стиррода как в случае компактной, так и в случае дискретной группы коэффициентов.

Теорема 8. Для любого компактного метрического пространства X и любой счетной фундаментальной системы S имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow L'\{H_{n+1}(X_\alpha, G)\} \rightarrow H_n^K(X, T(S), G) \rightarrow \check{H}_n(X, G) \rightarrow 0,$$

где $L'\{H_{n+1}(X_\alpha, G)\}$ — первый производный функтор обратного спектра $\{H_{n+1}(X_\alpha, G), \pi_{\beta\alpha}^*\}$.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе

Поступило
10 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. Milnor, On the Steenrod Homology Theory, Preprint, Princeton, 1959. ² A. N. Kolmogorov, C. R., 202, 1325 (1936). ³ N. E. Steenrod, Ann. Math., 41, 833 (1940). ⁴ Г. С. Чогошвили, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, 421 (1951). ⁵ П. С. Александров, Уч. зап. Московск. унив., в. 45, Математика 1940. ⁶ С. Маклейн, Гомология, М., 1966.