

А. В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ

СВОЙСТВО ПАРАКОМПАКТНОСТИ В КЛАССЕ СОВЕРШЕННО НОРМАЛЬНЫХ ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 19 X 1971)

Недавно Фрэнклин Д. Толл (Franklin D. Tall), занимаясь исследованием совместимости с обычными аксиомами теории множеств известных общих утверждений о топологических пространствах, естественно пришел к следующему вопросу: совместимо ли с системой Цермело — Френкеля утверждение: «существует совершенно нормальное слабо паракомпактное локально бикомпактное хаусдорфово пространство, которое не паракомпактно»? Толл осуществил интересную редукцию: если такое пространство существует, то существует неметризуемое нормальное пространство с равномерной базой ⁽¹⁾. Вопрос о существовании последнего давно волнует специалистов.

Здесь будет дан ответ на вопрос Толла. Теорема 1, которая заключает этот ответ, была доказана мной 13 лет назад, но, по своеобразному стечению обстоятельств, осталась неопубликованной.

Теорема 1. *Совершенно нормальное локально бикомпактное слабо паракомпактное хаусдорфово пространство сильно паракомпактно.*

Лемма 1. *Если Y — полное в смысле Чеха пространство, то существует последовательность баз $\{\mathcal{B}_n: n \in N^+\}$ пространства Y такая, что если $V_n \in \mathcal{B}_n$ и $V_{n+1} \subset V_n$ для каждого $n \in N^+ = \{1, 2, \dots\}$, то $\bigcap \{[V_n]: n \in N^+\} \neq \Lambda$.*

Рассмотрим какое-нибудь бикомпактное хаусдорфово расширение bY пространства Y . Существует семейство $\{G_i: i \in N^+\}$ открытых в bY множеств такое, что $\bigcap \{G_i: i \in N^+\} = Y$. Примем за $\mathcal{B}_n$ для каждого $n \in N^+$ семейство всех открытых в Y множеств V , для которых $[V]_{bY} \subset G_n$. Очевидно, $\{\mathcal{B}_n: n \in N^+\}$ — искомое множество баз пространства Y .

Примем несколько соглашений об обозначениях. Пусть $A \subset Y$, λ — семейство подмножеств пространства Y и $n \in N^+$. Тогда $Kr(A, \lambda) \leq n$ ($Kr(A, \lambda) \geq n$) означает, что никакая точка множества A не содержится более, чем в n элементах семейства λ (соответственно, что каждая точка множества A содержится не менее, чем в n элементах семейства λ). Заметим, что отрицание соотношения $Kr(A, \lambda) \leq n$ существенно слабее соотношения $Kr(A, \lambda) \geq n + 1$.

Далее, мы полагаем $\lambda_A = \{U \in \lambda: U \cap A \neq \Lambda\}$. Другие обозначения имеют тот же смысл, что и, например, в ⁽¹⁾.

Тривиальны, но полезны следующие леммы 2 и 3.

Лемма 2. *Для любого семейства λ открытых множеств пространства Y и любого $A \subset Y$ $\lambda_A = \lambda_{[A]}$.*

Лемма 3. *Всегда $\lambda_{A \cup B} = \lambda_A \cup \lambda_B$. То же верно для любого множества слагаемых.*

Семейство η открытых множеств пространства Y назовем d -покрытием последнего, если $[\bigcup \{U: U \in \eta\}] = Y$.

Лемма 4. *Каждая база пространства содержит его дизъюнктное d -покрытие.*

Действительно, в силу принципа Куратовского — Цорна существует

максимальное дизъюнктивное подсемейство элементов базы. Очевидно, оно и является искомым d -покрытием.

Лемма 5. Каждое покрытие ξ пространства Y содержит такое d -покрытие η последнего, что $|\eta| \leq c(Y)$.

Обозначим через $\mathcal{B}_\xi$ совокупность всех открытых множеств пространства Y , содержащихся хотя бы в одном элементе покрытия ξ . Очевидно, $\mathcal{B}_\xi$ — база Y . Существует (лемма 4) дизъюнктивное d -покрытие γ пространства Y , содержащееся в $\mathcal{B}_\xi$. Но $|\gamma| \leq c(Y)$.

Для каждого $U \in \gamma$ зафиксируем содержащий его элемент $V(U)$ покрытия ξ . Тогда $\eta = \{V(U) : U \in \gamma\}$, очевидно, искомого d -покрытия пространства Y .

Лемма 6. Если U — открытое в Y множество, $n \in N^+$ и λ — семейство открытых множеств в Y такое, что $Kp(U, \lambda) \leq n$, то $|\lambda_U| \leq c(Y)$.

Если $n = 0$, утверждение очевидно. Пусть для $n = k$ оно верно. Предположим теперь, что $Kp(U, \lambda) \leq k + 1$. Рассмотрим $E = U \cap (\bigcup \{V : V \in \lambda\})$. Ясно, что множество E открыто. Поэтому $c(E) \leq c(Y)$. В силу леммы 5 существует семейство $\mu \subset \lambda$ такое, что $|\mu| \leq c(Y)$ и $E^* = U \cap (\bigcup \{V : V \in \mu\})$ всюду плотно в E . Так как $[E^*] = [E]$, то (лемма 2) $\lambda_{E^*} = \lambda_{[E^*]} = \lambda_{[E]} = \lambda_E$. Положим $\lambda^* = \lambda \setminus \mu$. Очевидно, $Kp(E^*, \lambda^*) \leq Kp(E^*, \lambda) - 1 \leq k$. Множество E^* открыто. Мы вправе применить индуктивное предположение. Заключаем $|\lambda_{E^*}^*| \leq c(Y)$. Но $\lambda_{E^*} \subset \lambda_{E^*}^* \cup \mu$. Поэтому и $|\lambda_{E^*}| \leq c(Y)$. Так как $\lambda_{E^*} = \lambda_E = \lambda_U$, получаем окончательно $|\lambda_U| \leq c(Y)$.

Лемма 7. Если λ — семейство (непустых) открытых множеств в Y , для которого $|\lambda| > c(Y)$, $\mathcal{B}$ — база пространства Y и $n \in N^+$, то существует $V \in \mathcal{B}$, для которого $Kp(V, \lambda) \geq n$ и $|\lambda_V| > c(Y)$.

Положим $Q = \{x \in Y : |\lambda_{\{x\}}| \leq n - 1\}$ и $W = Y \setminus Q$. Очевидно, W открыто, $W \cup Q = Y$ и $Kp(W, \lambda) \geq n$, $Kp(Q, \lambda) \leq n - 1$. Множество Q , вообще говоря, не открыто. Рассмотрим $Q^* = Y \setminus [W]$. Очевидно, $Q^* \subset Q$ и, значит, $Kp(Q^*, \lambda) \leq n - 1$. Кроме того, $Q^* \cup [W] = Y$, поэтому из лемм 2 и 3 следует, что $\lambda = \lambda_Y = \lambda_{Q^*} \cup \lambda_W$. В силу леммы 6 $|\lambda_{Q^*}| \leq c(Y)$. Так как $|\lambda| > c(Y)$, получаем $|\lambda_W| > c(Y)$.

Далее, положим $\mathcal{B}_W = \{V \in \mathcal{B} : V \subset W\}$. Семейство $\mathcal{B}_W$ — база пространства W . Так как W открыто, $c(W) \leq c(Y)$. В силу леммы 5 существует d -покрытие γ пространства W , содержащееся в $\mathcal{B}_W$, такое, что $|\gamma| \leq c(W)$. Положим $W^* = \bigcup \{V : V \in \gamma\}$. Тогда $[W^*] = [W]$. Следовательно (лемма 2), $\lambda_W = \lambda_{W^*}$ и, значит, $|\lambda_{W^*}| > c(Y)$. Но $\lambda_{W^*} = \bigcup \{\lambda_V : V \in \gamma\}$ (лемма 3) и $|\gamma| \leq c(Y)$. Найдется поэтому $V^* \in \gamma$, для которого $|\lambda_{V^*}| > c(Y)$. При этом $V^* \subset W$ и, так как $Kp(W, \lambda) \geq n$, $Kp(V^*, \lambda) \geq n$, т. е. множество V^* искомого.

Предложение 1. Если Y — полное в смысле Чеха пространство и λ — точечно конечное семейство непустых открытых множеств пространства Y , то $|\lambda| \leq c(Y)$.

Предположим, что $|\lambda| > c(Y)$. Зафиксируем последовательность $\eta = \{\mathcal{B}_n : n \in N^+\}$ баз пространства Y такую, как в лемме 1.

Сейчас будет определена по индукции последовательность $\xi = \{U_n : n \in N^+\}$ множеств в Y такая, что для каждого $n \in N^+$

- 1₁) $[U_{n+1}] \subset U_n$;
- 1₂) $U_n \in \mathcal{B}_n$;
- 1₃) $Kp(U_n, \lambda) \geq n$;
- 1₄) $|\lambda_{U_n}| > c(U_n)$.

Положим $U_1 = Y$. Пусть уже определено открытое множество $U_k \subset Y$, причем $|\lambda_{U_k}| > c(U_k)$. Семейство $\mathcal{B}^* = \{U \in \mathcal{B}_{k+1} : [U] \subset U_k\}$ составляет базу пространства U_k . Положим $\lambda^* = \{V \cap U_k : V \in \lambda_{U_k}\}$ — семейство

непустых открытых множеств в U_k , причем $|\lambda^*| = |\lambda_{U_k}| > c(U_k)$ (различные элементы семейства λ^* могут совпадать как множества!). К λ^* , $\mathcal{B}^*$ и U_k (в роли λ , $\mathcal{B}$ и Y соответственно) и числу $k+1$ (в роли n) можно применить лемму 7. Значит, существует $V \in \mathcal{B}^*$, для которого $Kp(V, \lambda^*) \geq k+1$ и $|\lambda_{V^*}| > c(U_k)$. Положим $U_{k+1} = V$. Очевидно, условия $i_1) - i_4)$ для $n = k+1$ при этом соблюдены. Этим закончено определение последовательности ξ .

В силу основного свойства последовательности η , $\bigcap \{[U_n]: n \in N^+\} \neq \Lambda$. Но (см. $i_1)$) $\bigcap \{[U_n]: n \in N^+\} = \bigcap \{U_n: n \in N^+\}$. Значит, существует $x \in \bigcap \{U_n: n \in N^+\}$. Так как (см. $i_3)$) $Kp(U_n, \lambda) \geq n$ и $x \in U_n$ для всех $n \in N^+$, $|\lambda_{\{x\}}| \geq \aleph_0$ — противоречие с точечной конечностью λ . Предложение 1 доказано. Из него сразу следует

Предложение 2. Пусть λ — точечно конечное семейство открытых полных в смысле Чеха множеств пространства Y .

Тогда $|\lambda_U| \leq c(U)$ для каждого $U \in \lambda$.

Определение 1 (*). Назовем пространство Y σ -метакомпактным, если в каждое открытое покрытие этого пространства можно вписать открытое покрытие, являющееся объединением счетного множества точечно конечных семейств множеств (т. е. открытое σ -точечно конечное покрытие).

Каждое слабо паракомпактное (metacompact), равно как и каждое просеянное (screenable, см. (3)) пространство, очевидно, является σ -метакомпактным.

Из предложения 1 непосредственно вытекает

Теорема 2. Если Y полно в смысле Чеха и σ -метакомпактно, то из каждого открытого покрытия пространства Y можно выделить подпокрытие мощности, не большей, чем $c(Y)$.

Следствие 1. Если Y полно в смысле Чеха, каждое (открытое) подпространство пространства Y σ -метакомпактно и $c(Y) \leq \aleph_0$, то Y наследственно финально компактно.

Следствие 2. Пусть Y — бикомпакт, $c(Y) \leq \aleph_0$, $F \subset Y$, F замкнуто в Y .

Тогда F — множество типа G_δ в Y в том и только в том случае, если $Y \setminus F$ σ -метакомпактно.

Лемма 8. Подпространство типа F_σ σ -метакомпактного пространства само σ -метакомпактно.

Эта лемма доказывается без труда. Из нее (и следствия 1) вытекает

Теорема 3. Пусть Y — полно в смысле Чеха σ -метакомпактное пространство, в котором каждое замкнутое множество имеет тип G_δ .

Тогда, если $c(Y) \leq \aleph_0$, то Y наследственно финально компактно.

Из предложения 2 в силу известного стандартного приема (см., например, (2)) следует

Теорема 4. Если слабо паракомпактное пространство Y локально удовлетворяет условию Суслина и локально полно в смысле Чеха, то Y является свободной суммой финально компактных пространств.

Следствие 3. Если выполняются посыпки теоремы 4 и, кроме того, Y регулярно, то Y сильно паракомпактно.

Отсюда вытекает, очевидно, теорема 1. Впрочем, воспользовавшись тем, что совершенно нормальное просеянное пространство паракомпактно, несложно показать, что в теореме 1 (но не в теореме 4!) требование слабой паракомпактности может быть заменено более слабым требованием σ -метакомпактности.

Определение 2. Назовем приведенным весом $w_r(Y)$ пространства Y наименьшее кардинальное число τ такое, что существует множество γ точечно конечных семейств открытых множеств пространства Y со свойствами $|\gamma| = \tau$ и $\bigcup \{\lambda: \lambda \in \gamma\}$ — база Y .

Очевидно, всегда $w_r(Y) \leq w(Y)$.

Сразу следует из предложения 1

Теорема 5. Если Y полно в смысле Чеха, то $w(Y) = \max(w_r(Y), c(Y))$.

Следствие 4. Если полное в смысле Чеха пространство Y обладает σ -точечно-конечной базой (т. е. $w_r(Y) \leq \aleph_0$) и удовлетворяет условию Сулина (т. е. $c(Y) \leq \aleph_0$), то Y — метризуемое пространство со счетной базой.

Некоторые результаты (следствие 1, теоремы 3 и 4 и др.) для простоты были сформулированы не в наибольшей общности. Их обобщения очевидны.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. В. Архангельский, ДАН, 192, № 2 (1970). ² Ю. М. Смирнов, Изв. АН СССР, сер. матем., 20, 253 (1956). ³ R. H. Bing, Canad. Math. J., 3, 175 (1951). ⁴ F. D. Tall, Doctor. Dissertation, Univ. of Wisconsin, 1969.