Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 3

УДК 622.324+548.56

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР Н. В. ЧЕРСКИЙ, Э. А. БОНДАРЕВ

О ТЕПЛОВОМ МЕТОДЕ РАЗРАБОТКИ ГАЗОГИДРАТНЫХ ЗАЛЕЖЕЙ

Свойство природных газов образовывать в земных недрах крупные скопления в виде кристаллогидратов ([1]) приводит к необходимости решения задачи о методах разработки таких залежей. Известно, что существование гидратов газа данного состава определяется некоторыми предельными значениями температуры и давления. Повышение температуры или снижение давления приводит к разложению гидратов ([2]). Отсюда идея теплового воздействия на газогидратные залежи с целью добычи газа.

Оценка эффективности этого технически сложного метода невозможна без создания математической модели процесса разрушения гидратов в пористой среде и последующей фильтрации газа. В настоящей работе предлагается такая модель, которая по существу является усложненным вариантом задачи Стефана.

Пусть газогидратная залежь представляет твердое тело с начальной температурой $T_н$. Начиная с некоторого момента времени на границе $x=0$ устанавливается постоянная температура $T_0 \gg T_н$, что приводит к разложению гидрата и фильтрации газа через породы пласта — коллектора. Между газом и кристаллогидратом возникает движущаяся граница раздела $x=x_1(t)$, температура на которой, в отличие от обычной задачи Стефана, есть функция давления:

$$T_ф / T_{кр} = \alpha_1 \ln (P / P_{кр}) + \beta, \qquad (1)$$

где $T_{кр}$ и $P_{кр}$ — критические температуры и давление газа, α_1 и β — экспериментально определяемые константы ([2]).

В силу условия $T_0 \gg T_н$ естественно предположить, что область $0 < x < x_1(t)$ занимает газ, фильтрующийся в пористой среде, а область $x > x_1(t)$ занята гидратами.

В таком случае система уравнений, описывающих данный процесс будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T_1}{\partial x} - c_p \rho_г v T_1\right) = c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t}, \quad 0 < x < x_1(t); \qquad (2)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \quad x > x_1(t), \qquad (3)$$

где $\lambda = \lambda_1(1-m) + \lambda_г m$, $a_2 = \lambda_2 / (\rho_2 c_2)$, λ_1, c_1, ρ_1 — теплопроводность, теплоемкость и плотность скелета горных пород, $\lambda_г$, c_p, $\rho_г$ — то же для газа, λ_2, c_2, ρ_2 — то же для случая заполнения пористой среды кристаллогидратами; m — пористость.

Примем, что скорость движения газа, образовавшегося после разложения, подчиняется закону Дарси

$$v = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}, \qquad (4)$$

где k — проницаемость, μ — вязкость газа.

Для замыкания системы (2)—(4) воспользуемся уравнением неразрывности

$$\partial(\rho_г v) / \partial x + m\, \partial \rho_г / \partial t = 0 \qquad (5)$$

и уравнением состояния реального газа

$$P = zRT_1\rho_г, \tag{6}$$

где z — коэффициент, учитывающий отклонения свойств реальных газов от идеального. В общем случае

$$z = z(P, T_1). \tag{7}$$

Начальные и граничные условия:

$$T_1(0, t) = T_0, \tag{8}$$

$$T_2(x, 0) = T_п, \tag{9}$$

$$T_1 = T_2 = T_ф(P) \quad \text{при} \quad x = x_1(t), \tag{10}$$

$$-\lambda\frac{\partial T_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x} = K\frac{\partial x_1}{\partial t} \quad \text{при} \quad x = x_1(t), \tag{11}$$

где функция $T_ф(p)$ определяется согласно (1), K — скрытая теплота разложения гидратов.

Функция $T_2(x, t)$ должна также удовлетворять условию ограниченности на бесконечности.

К обычным для задачи Стефана условиям на подвижной границе здесь следует добавить условие баланса массы в виде

$$-\rho_г v = m\rho_2 dx_1 / dt, \quad x = x_1(t). \tag{12}$$

В качестве второго граничного условия для давления можно принять

$$P(0, t) = P_0, \tag{13}$$

что соответствует технологической схеме отбора газа с постоянным забойным давлением.

В такой постановке задача о продвижении границы разложения кристаллогидратов допускает автомодельное решение, когда все искомые функции зависят от переменной $y = x / (2\sqrt{a_2 t})$. Как известно [3], в этом случае закон движения границы раздела имеет вид

$$x_1 = 2\alpha\sqrt{a_2 t}, \tag{14}$$

где α — постоянная, определяемая в ходе решения задачи.

В настоящей работе основное внимание уделено принципиальной стороне вопроса, поэтому достаточно рассмотреть лишь простейший случай разложения кристаллогидратов при постоянных теплофизических параметрах газа, самих гидратов и пористой среды. Кроме того, примем, что образующийся при разложении гидратов газ является идеальным, что соответствует случаю $z = 1$ в соотношении (6).

Исключая с помощью (4) скорость из уравнений (2) и (5) и граничного условия (12) и производя необходимые вычисления, вместо системы (2)—(13) получим

$$\frac{d^2T_1}{dy^2} + \frac{2c_1\rho_1 a_2}{\lambda} y\frac{dT_1}{dy} + \frac{c_p k}{2R\mu\lambda}\frac{d^2P^2}{dy^2} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < y < \alpha, \tag{15}$$

$$\frac{d^2T_2}{dy^2} + 2y\frac{dT_2}{dy} = 0 \quad \text{при} \quad y > \alpha, \tag{16}$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{P}{T_1}\frac{dP}{dy}\right) + \frac{2m\mu a_2}{k} y\frac{d}{dy}\left(\frac{P}{T_1}\right) = 0; \tag{17}$$

$$T_1(0) = T_0, \tag{18}$$

$$T_2(\infty) = T_н, \tag{19}$$

$$T_1 = T_2 = T_ф(P) \quad \text{при} \quad y = \alpha; \tag{20}$$

$$\left(-\lambda\frac{dT_1}{dy} + \lambda_2\frac{dT_2}{dy}\right)_{y=\alpha} = 2K\alpha a_2; \tag{21}$$

$$\frac{P}{T_1}\frac{dP}{dy} = \frac{2\alpha\rho_2 a_2 m\mu R}{k} \quad \text{при} \quad y = \alpha, \tag{22}$$

$$P(0) = P_0. \tag{23}$$

Три обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнения второго порядка служат для определения трех функций T_1, T_2 и P. В общем случае решение задачи (15)—(23) легко осуществимо при помощи ЭВМ. В то же время характер рассматриваемого процесса позволяет ввести упрощающее допущение, после чего становится возможным построить решение в квадратурах.

Из физических соображений очевидно, что скорость продвижения границы изменения фазового состояния будет гораздо меньше скорости течения газа. Из (12) следует, что отношение этих скоростей будет порядка отношения плотностей газа и его гидрата. Заметим, что плотность гидратов большинства углеводородных газов того же порядка, что плотность воды. Следовательно, процесс движения газа можно считать квазистационарным, чему в силу (5) и (17) соответствует

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{P}{T_1}\frac{dP}{dy}\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{P}{T_1}\frac{dP}{dy} = A_1.$$

Воспользовавшись условием (22) и исключая давление из уравнения (15), получим

$$\frac{d^2T_1}{dy^2} + 2(b_1 + b_2y)\frac{dT_1}{dy} = 0, \tag{24}$$

$$b_1 = \alpha\lambda_2 c_p m / (\lambda c_2), \qquad b_2 = c_1\rho_1 a_2 / \lambda.$$

Таким образом, в этом частном случае температуры T_1 и T_2 определяются независимо из уравнений (16) и (24), а давление вычисляется при помощи квадратуры

$$P^2 = P_0^2 + 2b_1\int_0^y T_1(y)\,dy. \tag{25}$$

Решая уравнения (16) и (24) при граничных условиях (18)—(20), получим

$$T_1 = T_0 - [T_0 - T_ф(P)]\frac{\operatorname{erf}(b_3 + z\sqrt{b_2}) - \operatorname{erf} b_3}{\operatorname{erf}(b_3 + \alpha\sqrt{b_2}) - \operatorname{erf} b_3}, \qquad b_3 = b_1/\sqrt{b_2}, \tag{26}$$

$$T_2 = T_н + [T_ф(P) - T_н]\frac{\operatorname{erfc} y}{\operatorname{erfc} \alpha}. \tag{27}$$

Для определения константы α имеем следующее трансцендентное уравнение, полученное при помощи граничного условия (21):

$$\frac{(T_0 - T_ф)\exp(-(b_3 + \alpha\sqrt{b_2})^2)}{\operatorname{erf}(b_3 + \alpha\sqrt{b_2}) - \operatorname{erf} b_3} - \frac{(T_ф - T_н)\exp(-\alpha^2)}{\operatorname{erfc}\alpha} = K\alpha a_2\sqrt{\pi}. \tag{28}$$

Выражения (25)—(28) дают полное решение задачи. Его особенностью является наличие связи между температурой разложения $T_ф$ и давлением P, определяемой соотношением (1).

Якутский филиал
Сибирского отделения Академии наук СССР

Поступило
13 VIII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Черский, В. Г. Васильев, Ю. Ф. Макогон, Ф. А. Требин, А. А. Трофимук, Диплом на открытие № 75 с приоритетом от 25 июля 1961 г. Комитет по делам изобретений и открытий при СМ СССР, 4 марта 1971 г. [2] Б. В. Дегтярев, Г. С. Лутошкин, Э. Б. Бухгалтер, Борьба с гидратами при эксплуатации газовых скважин в районах Севера, М., 1969. [3] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, М., 1953.