

А. Б. ВИСТЕЛИУС, А. В. ФААС

**О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЗЕРЕН КВАРЦА,
КАЛИЕВОГО ПОЛЕВОГО ШПАТА И ПЛАГИОКЛАЗА
В ИДЕАЛЬНЫХ ГРАНИТАХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
СЛАБОГО МЕТАСОМАТОЗА**

(Представлено академиком Д. С. Коржинским 29 III 1971)

1. Имеется последовательность зерен

$$\dots, a_{L1}^{(k-1)}, a_{I1}^{(k)}, a_{J1}^{(k+1)}, \dots \{L, I, J\} = \{Or, Q, Ab\} \quad (1)$$

из идеального магматического гранита (индекс 1 указывает на магматическое происхождение зерна). На эту последовательность наложен метасоматоз. Благодаря метасоматозу между зернами в (1) возникли новые зерна $a_{S2i}; s \in \{Or, Q, Ab\}$, где индекс 2 указывает на метасоматическое происхождение зерна. Под микроскопом наблюдается последовательность зерен

$$\dots, a_L, a_I, a_J, \dots, \quad (2)$$

возникшая за счет внедрения метасоматических зерен между зернами в последовательности (1). Изучая (2), требуется решить, у каких минералов имеются зерна метасоматического происхождения.

2. Рассматривается следующий вариант задачи (о слабом метасоматозе). По контактам между зернами (1) происходит инфильтрация раствора, насыщенного по отношению к минералу I. При этом на зерне минерала I в последовательности (1) могут образоваться зародыши, которые растут, частично замещая соседние с I зерна J при $I \neq J$. При этом рассматриваются случайные события, при которых каждому зерну отвечает одна геометрическая точка, расположенная на прямой вплотную к соседним точкам. Таким образом, вместо тройки зерен $\dots, a_{L1}, a_{I1}, a_{J1}, \dots$ возникает последовательность одного из трех видов: $a_{L1}, a_{I2}, a_{I1}, a_{J1}$, или $a_{L1}, a_{I1}, a_{I2}, a_{J1}$, или $a_{L1}, a_{I2}, a_{I1}, a_{I2}, a_{J1}$.

Может быть несколько этапов нарастания новых зерен. Тогда рядом с зерном a_{I1} образуются цепочки зерен a_{I2} . Общее число l зерен a_{I2} $l \leq h_I$, где h_I — фиксированное небольшое число.

Вероятность прирастания зерна с индексом 2 к зерну с индексом 1 не зависит от положения зерна с индексом 1 в последовательности, а возможность его разрастания зависит только от состава зерен, соседних тому, к которому прирастает новое зерно.

Образование зерен a_{I2} путем замещения зерен a_{J1} идет так, что зерно a_{J1} никогда не замещается полностью. Таким образом, если на прямой имела точка, отвечающая a_{J1} , то эта точка сохраняется и после завершения начальной стадии метасоматоза. Одновременно ближайшими соседями a_{J1} с индексами 1 сохраняются те же зерна, что были в (1), но они могут быть отделены от данного зерна a_{I1} цепочкой зерен длины l с индексом 2.

Формулируя изложенное представление о процессе слабого метасоматоза в гранитах в терминах вероятностной модели, получаем следующее.

1. Для любого k зерно $a_I^{(k)}$ из тройки $\dots, a_L^{(k-1)}, a_I^{(k)}, a_J^{(k+1)}, \dots$

способно превратиться в $2, 3, \dots, h_1$ зерен, если выполнено хотя бы одно из условий $L \neq I$ или $J \neq I$, если же $L = I = J$, то вероятность такого превращения равна нулю.

II. Вероятность $P_l(a_{I1}^{(k)}; L, J)$ превращения зерна $a_{I1}^{(k)}$ в l зерен зависит только от неупорядоченной пары соседей состава L, J ($l \leq h_1$ при $l \geq h_1$, $P_l(a_{I1}^{(k)}; L, J) = 0$) и не зависит от k . Процесс может протекать по любому минералу I , паре минералов I, J или по всем трем минералам I, J, L .

Задача заключается в следующем. Из последовательности

$$\dots, a_{L1}, a_{L2}, a_{I1}, a_{J1}, a_{J2}, \dots \quad (3)$$

с помощью операции $a_s = a_{s1} \cup a_{s2}$ получена последовательность

$$\dots, a_L, a_L, a_I, a_J, a_J, \dots \quad (4)$$

Требуется описать свойства последовательности (3) и установить, у каких минералов в (4) имеются зерна метасоматического происхождения (или, что то же, у каких минералов в (4) не возникало метасоматических зерен).

3. Мы будем говорить, что переход через данное состояние марковский s -го порядка, если $P(a_R^{(k)}/a_I^{(k-1)}, \dots, a_L^{(k-s)}, \dots, a_J^{(k-s-l)}) = P(a_R^{(k)}/a_I^{(k-1)}, \dots, a_L^{(k-s)})$

при любых конечных k и l и любых наборах $R, L, \dots, J$.

4. Анализ влияния слабого метасоматоза на идеальный магматический гранит показывает, что после метасоматической переработки последовательности (1) последовательности (3) и (4) сохраняют однородность и обратимость.

Теорема. Переход через состояние J в последовательности (4) является простым марковским, т. е.

$$P(a_I^{(k)}/a_J^{(k-1)}, a_L^{(k-2)}, \dots, a_R^{(k-h+1)}, a_S^{(k-h)}) = P(a_I^{(k)}/a_J^{(k-1)}) \quad (5)$$

при любых конечных k и h , если минерал J образовывался только магматическим путем.

Доказательство. Переход через минерал J в идеальном, магматическом граните является простым марковским в однородной последовательности (1), т. е.

$$P(a_{I1}^{(k)}/a_{J1}^{(k-1)}, a_{L1}^{(k-2)}, \dots, a_{S1}^{(k-h)}) = P(a_{I1}^{(k)}/a_{J1}^{(k-1)}) \quad (6)$$

при любых конечных k и h .

Рассмотрим возможные реализации (3), при которых имеет место событие в (5).

Предположим сначала, что у I могут образовываться зерна метасоматическим путем. Тогда имеется две возможности; либо $(a_{I1}/a_{J1}, a_{L1}, \dots, a_{Ss})$, либо $(a_{I2}/a_{J1}, a_{L1}, \dots, a_{Ss})$. Вероятность первого события $P(a_I/a_J)q_{IJ}$, где q_{IJ} есть вероятность того, что в тройке контактирующих зерен a, a_{I1}, a_{J1} к зерну a_{I1} не прирастет ни одного зерна справа (a — зерно произвольного состава), вероятность второго $P(a_I/a_J)p_{JI}$, где p_{JI} — вероятность того, что в тройке контактирующих зерен a, a_{I1}, a_{J1} к зерну a_I прирастет слева зерно или серии зерен. Предположим теперь, что у I зерна образуются только магматическим путем. Тогда имеется единственная возможность события $(a_{I1}/a_{J1}, a_{L1}, \dots, a_{Ss})$ с вероятностью $P(a_I/a_J)$. Таким образом, во всех трех случаях вероятность изучаемого перехода зависит только от предшествующего состояния J и последующего I и не зависит от более раннего прошлого. Таким образом, в последовательности (3) переход через $J1$ является простым марковским. Покажем теперь, что простая марковость сохраняется в (4) для перехода через J .

Пользуясь выражением для условной вероятности и учитывая однородность, перепишем (5) в виде

$$\frac{P \bigcup_{s, \dots, b, i} (a_{Ss}, \dots, a_{Li}, a_{J1}, a_{Ii})}{P \bigcup_{s, \dots, i} (a_{Ss}, \dots, a_{Li}, a_{J1})} = \frac{P \bigcup_i (a_{J1}, a_{Ii})}{P(a_{J1})}; \quad (7)$$

если малый индекс связан с большим, означающим метасоматическое состояние, то малый индекс может принимать значение 1 или 2; если большой индекс относится к магматическому состоянию, то суммирование по малому индексу не производится.

Используем теперь простую марковость последовательности (3), откуда

$$P(a_{Ss}, \dots, a_{Ll}, a_{J1}, a_{Ii}) = \frac{P(a_{Ss}, \dots, a_{Ll}, a_{J1}) \cdot P(a_{J1}, a_{Ii})}{P(a_{J1})}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в числитель (7) и учитывая дистрибутивное свойство вероятностной меры, получаем

$$\sum_{s, \dots, l, i} \frac{P(a_{Ss}, \dots, a_{Ll}, a_{J1}) P(a_{J1}, a_{Ii})}{P(a_{J1})} = \frac{\sum_i P(a_{J1}) P(a_{Ii}/a_{J1})}{\sum_{s, \dots, l} P(a_{Ss}, \dots, a_{Ll}, a_{J1})} = \frac{\sum_i P(a_{Ii}/a_{J1})}{P(a_{J1})}. \quad (9)$$

Производя сначала суммирование по второму индексу при I справа и слева в числителе в (9), вынося за скобки и сокращая, получаем требуемое тождество (5). Таким образом, теорема доказана.

5. Если в наблюдаемой последовательности переход через J простой марковский, то из этого не следует, что зерна J только магматического происхождения. Однако появление простого марковского перехода через состояние, имеющее метасоматические зерна, требует соблюдения очень жестких условий, заданных точными равенствами. Например, только одним из необходимых условий сохранения простой марковости является $P(a_I/a_I) = 4Q^2$, где Q — вероятность того, что в тройке $a^{(k-1)}, a_I^{(k)}, a_{I_0}^{(k+1)}$ (a — зерно произвольного состава, а I означает «не I») произойдет приращение к зерну a_I . Это делает практически невозможным сохранение простоты для перехода через состояния, имеющие зерна, возникшие при метасоматозе.

6. Доказанная теорема и п. 5 позволяют с уверенностью выделить в последовательности (4) минерал, зерна которого образовывались только магматическим путем. Имея последовательность примерно из тысячи зерен, поступаем так: а) проверяем однородность последовательности по отношению к матрицам переходных вероятностей P_{IJ}, P_{JK}, P_{JLK} ; б) выясняем симметричность матриц N_{IJ}, N_{JK}, N_{JLK} переходных частот, понимая в прямоугольных матрицах под симметрией статистическое равенство частот в клетках, переходящих одна в другую после транспонирования матриц; в) последовательно проверяем наличие марковского свойства первого порядка при переходе через каждое из трех состояний. При этом, конечно, следует иметь в виду вычислительный метод проверки, распространяющийся только на доступный наблюдениям материал.

Из изложенного видно, что матрица P_{JKL} при наличии состояния, не имеющего статистически зерен метасоматического происхождения, будет иметь три статистически неразличимых строки, отвечающих переходам с этого состояния. Так, если мы имеем три состояния (минерала) J, K, L и среди них переход через K имеет марковское свойство первого порядка, то все переходы с K на L независимо от предыдущего перед K состояния J будут иметь статистически одинаковые частоты.

Пользуясь критерием, асимптотически совпадающим с критерием отношения правдоподобия ⁽²⁾, находим статистику

$$\chi^2(H_0) = 2 \sum_{J, K, H_0, L} n_{JKH_0, L} \ln \frac{n_{JKH_0, L} \sum_J n_{JKH_0}}{n_{JKH_0} \sum_J n_{JKH_0, L}}. \quad (10)$$

H_0 содержит указание, какие минералы принимаются за имеющие только магматическое происхождение. Суммирование в (10) производится для $J \in \{Or, Q, Ab\}$; $L \in \{Or, Q, Ab\}$ и $K \in \{H_0\}$, где K — минерал (или минералы), отсутствие метасоматических зерен у которых проверяется.

Статистика λ имеет асимптотическое распределение (центральное) χ^2 с ν степенями свободы: $\nu = \nu_1 - \nu_0$, где ν_1 — число степеней свободы, которое имела бы статистика критерия согласия χ^2 наблюдаемых данных с распределением при справедливости H_1 , а ν_0 — то же число для гипотезы H_0 . В нашем случае для $H_0(J)$ $\nu_1 = 18$, так как имеется 27 клеток в матрице 9×3 , при этом сумма по каждой из девяти строк равна единице; $\nu_0 = 14$, так как к 9 ограничениям для всей матрицы прибавляются независимые ограничения, связанные с попарным равенством элементов у трех строк, т. е. еще 4. Для $H_0(J, K)$ $\nu = 8$. Последовательно проверяя отсутствие метасоматических зерен у всех минералов по очереди, складываем значения λ , если проверяется $H_0(J, K)$. Проверить $H_0(J, K, L)$ этим методом невозможно из-за нехватки степеней свободы.

7. Образец ЮК-2 аплитовидного гранита из маломощного силла, секущего нижнелазеоэойские граниты в верхней части карьера у дер. Данбити (Юго-Западная Шотландия), отобран А. Б. Вистелиусом и Дж. Харлем в 1967 г.; измерены переходы для 5022 зерен. Расчеты показали, что последовательность неотличима от однородной марковской последовательности второго порядка. При этом большое число замеренных зерен позволило проверить все альтернативы $M_i: M_{i+1}$ от $i = 0$ до $i = 5$, где i — порядок марковости. Матрица переходных частот для переходов JKL (для марковской последовательности второго порядка) дана ниже.

	Or	Q	Ab
Or Or	47	69	110
Or Q	253	116	170
Or Ab	618	156	243
Q Or	69	176	275
Q Q	112	86	92
Q Ab	171	110	129
Ab Or	111	297	630
Ab Q	153	88	149
Ab Ab	247	123	184

Систематическая проверка всех возможных гипотез (в скобках указан минерал, зерна которого образуются только магматическим путем) показала следующее:

$H_0(Q)$ — метасоматоз по Or и Ab; $\lambda_Q = 12,0$; $\nu = 4$; $0,025 > \chi^2 > 0,010$; гипотеза принимается на границе значимости.

$H_0(Or)$ — метасоматоз по Ab и Q; $\lambda_{Or} = 24,1$; $\nu = 4$, гипотеза бракуется;

$H_0(Ab)$ — метасоматоз по Or и Q; $\lambda_{Ab} = 65,2$; $\nu = 4$, гипотеза бракуется;

$H_0(Q, Or)$ — метасоматоз только по плагиноклазу; $\lambda_{Q, Or} = 36,1$; $\nu = 8$, гипотеза бракуется;

$H_0(Q, Ab)$ — метасоматоз только по калиевому полевоому шпату; $\lambda_{Q, Ab} = 77,2$; $\nu = 8$, гипотеза бракуется;

$H_0(Ab, Or)$ — метасоматоз только по кварцу; $\lambda_{Ab, Or} = 89,3$; $\nu = 8$, гипотеза бракуется.

Таким образом, принимается единственный вариант: метасоматическим путем возникали зерна калиевого полевого шпата и плагиноклаза.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
24 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Б. Вистелиус, А. В. Фаас, 198, № 4 (1971); 203, № 3 (1972). ² P. Billingsley, Ann. Math. Stat., 32, 12 (1961).