

УДК 517.941

МАТЕМАТИКА

М. Г. ГАСЫМОВ, М. Г. ДЖАВАДОВ

КРАТНАЯ ПОЛНОТА ЧАСТИ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 21 X 1971)

Рассмотрим граничную задачу, порожденную уравнением

$$l\left(x, \lambda, \frac{d}{i dx}\right) y \equiv \sum_{j=0}^{2n} a_j(x, \lambda) \left(\frac{d}{i dx}\right)^j y = 0 \quad (1)$$

и граничными условиями *

$$y^{(k)}(0) = y^{(k)}(1) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

в пространстве $L_2(0, 1)$. Не уменьшая общности, предположим, что

$$a_{2n}(x, \lambda) \equiv 1, \quad a_j(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{2n-j} a_{j,k}(x) \lambda^k,$$

а $a_{j,k}(x)$ — достаточно гладкие функции на отрезке $[0, 1]$.

Ставится следующий вопрос. Когда система $K(\Pi_-)$ собственных и присоединенных функций граничной задачи (1), (2), отвечающих ее корневым числам из левой полуплоскости, будет n -кратно полной в $L_2(0, 1)$?

Определение n -кратной полноты дано М. В. Келдышем (¹, ²).

Определение. Скажем, что граничная задача (1), (2) имеет положительный тип, если при всех $s \in (-\infty, \infty)$ оператор $\mathcal{L}_s$ порожденный дифференциальным выражением $l(x, is, \frac{d}{i dx})$ и граничными условиями (2) в $L_2(0, 1)$, является положительным.

Основная теорема. Предположим, что

а) существует постоянное положительное число α такое, что для всех $\xi \in [0, 1]$ и s из $(-\infty, \infty)$ имеет место неравенство

$$\alpha(\xi^{2n} + s^{2n}) \leq l_0(x, is, \xi),$$

где

$$l_0(x, \lambda, \xi) = \sum_{j=0}^{2n} a_{j, 2n-j}(x) \lambda^{2n-j} \xi^j;$$

б) граничная задача (1), (2) имеет положительный тип;

в) $a_{j,k}(x)$ — достаточно гладкие функции на отрезке $[0, 1]$.

Тогда система $K(\Pi_-)$ для граничной задачи (1), (2) будет n -кратно полной в $L_2(0, 1)$.

* Конечно, вместо этих граничных условий можно взять более общие граничные условия. Однако в этой работе мы ограничиваемся только специальными граничными условиями.

В случае уравнений с постоянными коэффициентами эта теорема приведена в ^(3, 4). Доказательство в этих работах проводится в предположении, что задача (1), (2) является регулярной в смысле Биркгофа — Тамаркина. Однако не всякая граничная задача, которая удовлетворяет условиям основной теоремы, является регулярной.

В работах ^(5, 6) указана общая схема решения основной задачи для абстрактных полиномиальных пучков. Применение этой схемы к граничной задаче (1), (2) показывает, что основная теорема вытекает из следующих предложений 1—3.

В дальнейшем везде предполагается, что все условия основной теоремы выполнены.

О функции Грина граничной задачи (1), (2).

Предложение 1. Функция Грина $K(x, \xi, \lambda)$ граничной задачи (1), (2) представляется в виде отношения двух целых функций относительно λ конечного порядка $\rho > 1$ и минимального типа при любом порядке $\rho > 1$.

Предложение 2. Существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для достаточно больших λ из углов

$$S_{\pm} = \{\lambda: |\arg \lambda \pm 1/2\pi| > \varepsilon\}$$

функция Грина $K(x, \xi, \lambda)$ удовлетворяет условиям

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial x^{m-j} \partial \xi^j} K(x, \xi, \lambda) \right| \leq C |\lambda|^{m-2n+1} \exp(-\delta |\lambda| \cdot |x - \xi|) \quad (3)$$

при некоторых $C > 0$, $\delta > 0$ и $m = 0, \dots, 2n-1$.

Кратко наметим доказательство предложения 2. Пусть β — произвольная точка из $[0, 1]$. Обозначим через $K(x, \xi, \beta, \lambda)$ функцию Грина граничной задачи, порожденной уравнением $l_0\left(\beta, \lambda, \frac{d}{dx}\right)y = 0$ и граничными условиями (2). Непосредственные вычисления показывают, что для функции $K(x, \xi, \beta, \lambda)$ имеют место оценки типа (3), причем они равномерны относительно $\beta \in [0, 1]$.

Методом параметрикса нетрудно показать, что функция Грина граничной задачи (1), (2) является решением интегрального уравнения

$$K(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi, \xi, \lambda) + \int_0^1 K(x, t, \lambda) A(t, \xi, \lambda) dt, \quad (4)$$

где

$$A(t, \xi, \lambda) = \left\{ l_0\left(\xi, \lambda, \frac{\partial}{i \partial t}\right) - l\left(t, \lambda, \frac{\partial}{i \partial t}\right) \right\} K(t, \xi, \xi, \lambda).$$

Используя свойства функции $K(x, \xi, \beta, \lambda)$ и условия на $a_{j,k}(x)$, можно показать, что для достаточно больших λ из $S_{\pm}$ норма Гильберта — Шмидта оператора, порожденного ядром $A(t, \xi, \lambda)$ в $L_2(0, 1)$, стремится к нулю. Поэтому уравнение (4) для больших λ из $S_{\pm}$ решается методом последовательных приближений; отсюда утверждение предложения 2 получается непосредственно.

О решении эллиптической задачи. Рассмотрим уравнение

$$l\left(x, \frac{d}{i dt}, \frac{d}{i dx}\right) u(t, x) = 0 \quad (5)$$

в полуполосе $\Pi = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t < \infty\}$ при граничных условиях

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \Big|_{x=1} = 0, \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \Big|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (7)$$

Предложение 3. Пусть функция $\varphi_j(x)$ имеет производные до $(2n-j)$ -го порядка и $\varphi_j^{(k)}(0) = \varphi_j^{(k)}(1) = 0$, $k = 0, \dots, 2n-j$.

Тогда задача (5), (6), (7) имеет единственное решение $u(t, x)$, которое обладает следующими свойствами:

- а) производные $\frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^{k-s} \partial t^s} \in L_2(\Pi)$, $k = 0, \dots, n$;
- б) производные $\frac{\partial^{n+k} u(t, x)}{\partial x^{n+k-s} \partial t^s}$, $k = 1, \dots, n$, существуют и являются гладкими функциями внутри полосы Π ;
- в) функции $\frac{\partial^s u(t, x)}{\partial x^{k-s} \partial t^s}$ существуют при $0 < x < 1$, $s, k = 0, \dots, 2n-1$ и

$$\int_0^1 [x(1-x)]^{2(k-n)} \left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^{k-s} \partial t^s} \right|_{t=0}^2 dx < \infty.$$

Утверждение а) и б) доказываются методом работы (7), а в доказательстве утверждения в) используется метод работы (8) с дальнейшим применением результатов работы (2).

В заключение работы приведем следующие замечания.

1) Если граничная задача (1), (2) является регулярной в смысле Биркгофа — Тамаркина, то любой системе функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$, обладающей свойствами из предложения 3, соответствует разложение

$$\varphi_j(x) = \sum_{\operatorname{Re} \lambda_k < 0} \lambda_k a_k \psi_k(x)$$

по системе собственных функций * граничной задачи (1), (2) и это разложение суммируется к $\varphi_j(x)$ в следующем смысле:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \sum_{\operatorname{Re} \lambda_k < 0} \lambda_k^j a_k \psi_k(x) e^{\lambda_k t} = \varphi_j(x).$$

2) Основной результат работы обобщается на дифференциальные операторные пучки, порожденные сильно эллиптическими дифференциальными уравнениями в частных производных в конечной области с условиями Дирихле на границе, при определенных соотношениях между числом переменных и порядком уравнения.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
28 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 1, 11 (1951). ² М. В. Келдыш, УМН, 26, в. 4 (60), 15 (1971). ³ М. Г. Джавадов, ДАН, 159, № 4 (1964). ⁴ М. Г. Джавадов, ДАН, 160, № 4 (1965). ⁵ М. Г. Гасымов, ДАН, 199, № 4 (1971). ⁶ М. Г. Гасымов, Изв. АН АрмССР, сер. матем., 6, в. 2—3 (1971). ⁷ М. И. Вишик, О. А. Ладженская, УМН, 11, в. 6 (1956). ⁸ В. А. Кондратьев, ДАН, 146, № 1 (1962). ⁹ Л. Н. Слободецкий, Уч. зап. Ленингр. пед. инст. им. А. М. Герцена, 197 (1958).

* Для простоты предполагаем, что присоединенные функции задачи (1), (2) отсутствуют.