Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 6

УДК 517.948.35 МАТЕМАТИКА

А. В. ГОНЧАРСКИЙ, А. С. ЛЕОНОВ, А. Г. ЯГОЛА

НЕКОТОРОЕ ОБОБЩЕНИЕ ПРИНЦИПА НЕВЯЗКИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОПЕРАТОРА, ЗАДАННОГО С ОШИБКОЙ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 22 XI 1971)

Пусть дана некорректно поставленная задача

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U, \tag{1}$$

где Z и U — некоторые гильбертовы пространства, A — непрерывное отображение Z в U. При решении задачи (1) с помощью регуляризующего алгоритма (р.а.) Тихонова [1] возникает важный вопрос о выборе параметра регуляризации α [2, 3]. В работах [4, 5] обоснован выбор параметра α по принципу невязки для случая, когда оператор A задан точно. Если вместо A задано некоторое его приближение A_h, задача значительно усложняется. Ряд фундаментальных теорем о поведении невязки как функции α для этого случая был доказан В. А. Морозовым [5]. Однако значение α, выбираемое по принципу невязки, предложенному в этой работе, вообще говоря, есть функция точного решения (1) — $\bar{z}$, что ограничивает возможности эффективного применения данного алгоритма для решения практических задач. В данной работе предложен и обоснован выбор параметра α в р.а. Тихонова по принципу невязки для случая приближенного задания оператора A. При этом предлагается естественным, на наш взгляд, образом видоизменить форму самой невязки, так что полученный в результате алгоритм остается регуляризующим.

Будем рассматривать задачу (1) при условии, что $Z \equiv W_2^1[a, b]$, $U \equiv L_2$, а A есть линейное непрерывное отображение из $L_2[a, b]$ в L_2. Кроме того, будем считать, что каждой функции $\bar{u} \in AZ$ соответствует один и только один элемент $\bar{z} \in Z$. Обычно при решении задач типа (1) заданы не точные «входные данные» $\{A, \bar{u}\}$, а их приближения $\{A_h, \tilde{u}_\delta\}$. В дальнейшем будем считать, что A_h — линейный непрерывный оператор из $L_2[a, b]$ в L_2. Погрешность задания $\tilde{u}_\delta$ полагаем заданной обычным образом:

$$\|\bar{u} - \tilde{u}_\delta\|_{L_2} \leqslant \delta. \tag{2}$$

Определим погрешность h задания оператора как

$$h = \sup_{\substack{z \in L_2[a,b] \\ z \neq 0}} \frac{\|A_h z - Az\|_{L_2}}{\|z\|_{L_2[a,b]}} < +\infty, \tag{3}$$

или, что то же самое,

$$h = \|A - A_h\|. \tag{4}$$

Пусть $D(A_h)$ — подпространство в L_2, порождаемое линейным оператором A_h, а $\operatorname{Ker} A_h^+ \equiv \{x \in L_2[a, b] : A_h x = 0\}$. Тогда $L_2 = D(A_h) \oplus \operatorname{Ker} A_h^+$, и поэтому для любого элемента $\tilde{u}_\delta \in L_2$ единственным образом справедливо представление

$$\tilde{u}_\delta = \tilde{v}_\eta + \tilde{w}_\eta, \quad (\tilde{v}_\eta, \tilde{w}_\eta)_{L_2} = 0, \tag{5}$$

где $\eta(\delta, h)$, $\tilde{v}_\eta \in \operatorname{Ker} A_h^+$, $\tilde{w}_\eta \in D(A_h)$. Известно [5], что для любого линейного непрерывного оператора A_h, любого $\tilde{u}_\delta \in L_2$ и всякого $\alpha > 0$ существует единственный элемент z_η^α, реализующий минимум функционала Тихонова

$$M^\alpha[z, \tilde{u}_\delta, A_h] = \alpha \| z \|^2_{W_2^1[a,b]} + \| A_h z - \tilde{u}_\delta \|^2_{L_2} \tag{6}$$

в $W_2^1[a, b]$.

Введем следующие вспомогательные функции:

$$\beta(\alpha) = \| A_h z_\eta^\alpha - \tilde{u}_\delta \|^2_{L_2}, \quad \gamma(\alpha) = \| z_\eta^\alpha \|^2_{W_2^1[a,b]}. \tag{7}$$

В работе ([5]) показано, что при $\alpha > 0$ эти функции непрерывны, причем $\beta(\alpha)$ монотонно не убывает, а $\gamma(\alpha)$ монотонно не возрастает. Справедлива

Лемма. *Функции $\beta(\alpha)$ и $\gamma(\alpha)$ обладают следующими свойствами:*

$$\lim_{\alpha\to+0} \beta(\alpha) = \lim_{\alpha\to+0} M^\alpha[z_\eta^\alpha, \tilde{u}_\delta, A_h] = \| \tilde{v}_\eta \|^2_{L_2}, \tag{8}$$

$$\lim_{\alpha\to+0} \alpha\gamma(\alpha) = 0, \tag{9}$$

$$\lim_{\alpha\to+0} \| A_h z_\eta^\alpha \|^2_{L_2} = \| \tilde{u}_\delta \|^2_{L_2} - \| \tilde{v}_\eta \|^2_{L_2}, \tag{10}$$

причем

$$\| \tilde{v}_\eta \|^2_{L_2} \leqslant (\delta + h \| \bar{z} \|_{L_2[a,b]})^2. \tag{11}$$

Введем функцию

$$\rho(\alpha) \equiv \beta(\alpha) - 2h^2\gamma(\alpha) - \| \tilde{v}_\eta \|^2_{L_2}. \tag{12}$$

Будем называть $\rho(\alpha)$ обобщенной неувязкой. Справедлива

Теорема 1. *Пусть*

$$\| \tilde{u}_\delta \|^2_{L_2} > 2\delta^2 + \| \tilde{v}_\eta \|^2_{L_2} \quad \forall \eta > 0. \tag{13}$$

Тогда: 1) *уравнение*

$$\rho(\alpha) = 2\delta^2 \tag{14}$$

имеет по крайней мере один корень $\alpha(\eta)$ для любого $\eta > 0$, т. е. существует элемент $z_\eta^{\alpha(\eta)}$, реализующий минимум функционала (6) *в $W_2^1[a, b]$ при условии* (14);

2) *при $\eta \to 0$ имеет место сходимость* $z_\eta^{\alpha(\eta)} \xrightarrow{W_2^1[a,b]} \bar{z}$.

Замечание. Теорема 1 позволяет построить р.а. для приближенного решения задачи (1):

I) Решая задачу

$$\| \tilde{v}_\eta \|^2_{L_2} = \inf_{z\in L_2[a,b]} \| A_h z - \tilde{u}_\delta \|^2_{L_2}, \tag{15}$$

например, с помощью алгоритмов ([6]), можно найти $\mu_\eta = \|\tilde{v}_\eta\|^2_{L_2}$. Отметим, что, с другой стороны,

$$\mu_\eta = \| \tilde{v}_\eta \|^2_{L_2} = \lim_{\alpha\to+0} M^\alpha[z_\eta^\alpha, \tilde{u}, A_h]; \tag{16}$$

II) Находя экстремаль функционала (6) при каждом $\alpha > 0$ (см. ([2])) и определяя затем $\alpha(\eta)$ из условия (14), получаем функцию $z_\eta^{\alpha(\eta)}$, которая в смысле теоремы 1 является приближенным решением задачи (1).

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность акад. А. Н. Тихонову за постановку задачи, а также В. Б. Гласко и В. А. Винокурову за ценные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
28 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, ДАН, **153**, № 1, 49 (1963). [2] А. Н. Тихонов, ДАН, **151**, № 3, 501 (1963). [3] А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, Журнал вычислит. матем. и матем. физ., **5**, № 3, 463 (1956). [4] В. А. Морозов, ДАН, **167**, № 3, 510 (1966). [5] В. А. Морозов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., **8**, № 2, 295 (1968). [6] Б. М. Будак, Ф. П. Васильев, Приближенные методы решения задач оптимального управления, в. 2, М., 1969.