Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 6

УДК 519.9+62-50

МАТЕМАТИКА

В. А. АНДРЕЕВ, Ю. Ф. КАЗАРИНОВ, В. А. ЯКУБОВИЧ

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 28 VI 1971)

Рассмотрим систему управления, описываемую дифференциальным уравнением вида

$$dx / dt = Ax + b\sigma + f(t), \tag{1}$$

где x — вектор (порядка n) состояния системы, σ — вектор (порядка m) управления системой, A — постоянная матрица размерности $n \times n$, b — постоянная матрица размерности $n \times m$, $f(t)$ — вектор-функция возмущений порядка n. В (1) все матрицы и векторы вещественны. Ниже предполагается, что функция $f(t)$ измерима и ограничена на $[0, \infty)$ и что пара (A, b) управляема, т. е. что среди столбцов матриц $b, Ab, \ldots, A^{n-1}b$ есть n линейно независимых. Введем в рассмотрение пространство M_2 вещественных функций $\xi(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, для которых существует $\|\xi(t)\|^2 = \overline{\lim\limits_{T\to+\infty}}\, T^{-1}\int\limits_0^T |\xi(t)|^2\,dt.$ Вещественную вектор-функцию $\sigma(x, t)$ будем называть *допустимым управлением*, если уравнение (1) с $\sigma = \sigma(x, t)$ при заданном начальном условии $x(0) = a$ имеет решение $x = x(t)$ на $[0, \infty)$ (являющееся абсолютно непрерывной вектор-функцией и удовлетворяющее (1) почти всюду) такое, что выполнено $|x(t)| \in M_2$, $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}|x(t)|^2 = 0$, $|\sigma[x(t), t]| \in M_2$. Множество допустимых управлений будем обозначать через $\mathfrak{R}_a$. Очевидно, что $\mathfrak{R}_a$ непусто. (Действительно, $c^*x \in \mathfrak{R}_a$, если матрица $A + bc^*$ гурвицева.)

Пусть $F(x, \sigma)$ — некоторая заданная квадратичная форма векторных переменных x и σ порядков n и m, причем (и это важное для дальнейшего предположение) матрица $\varkappa$ формы $F(0, \sigma)$ положительно определенная*: $\sigma^*\varkappa\sigma > 0 \quad \forall\sigma \neq 0$. Пусть x и σ удовлетворяют (1) на $[0, T]$ и $x(0) = a$. Ниже будет использоваться обозначение $J_0^T(\sigma, a) = \int\limits_0^T F(x, \sigma)\,dt$. Будем предполагать, что критерий качества управления $\sigma \in \mathfrak{R}_a$ определяется функционалом $J(\sigma) = \overline{\lim\limits_{T\to+\infty}}\, T^{-1}J_0^T(\sigma, a)$. Из определения множества $\mathfrak{R}_a$ следует, что при $\sigma \in \mathfrak{R}_a$ предел, определяющий $J(\sigma)$, существует и конечен.

Ниже рассматривается задача о минимизации функционала $J(\sigma)$ на множестве $\mathfrak{R}_a$. Управление $\sigma_0 \in \mathfrak{R}_a$ будем называть *оптимальным*, если $J(\sigma_0) \leqslant J(\sigma) \quad \forall\sigma \in \mathfrak{R}_a$. Легко показать, что если оптимальное управление существует, то оно неединственно. В связи с этим введем понятие локально оптимального (л.о.) управления. Пусть $\sigma_0(x, t)$ — некоторое управление, $x_0 = x_0(t)$ — соответствующее решение, $x_0(0) = a$, $x_0(T) = a_T$, $\sigma_0 = \sigma_0[x_0(t), t]$. Будем говорить, что управление $\sigma_0(x, t)$ обладает свойством л.о., если для любого $T > 0$ и любых вектор-функций x, σ удов-

---

* Знак * означает транспонирование в случае вещественных матриц и эрмитово сопряжение в случае комплексных матриц и чисел. Пусть G — некоторая матрица. Ниже будем писать $G > 0$ ($G \geqslant 0$), если $G = G^*$ и соотношение $x^*Gx > 0$ ($x^*Gx \geqslant 0$) выполнено при любом $x \neq 0$.

летворяющих уравнению (1) и таких, что $x(0) = a$, $x(T) = a_T$; $|x| \in L_2(0, T)$, $|\sigma| \in L_2(0, T)$ имеет место неравенство $J_0{}^T(\sigma_0, a) \leqslant J_0{}^T(\sigma, a)$. Множество управлений $\sigma \in \mathfrak{R}_a$, обладающих свойством л.о., обозначим через $\mathfrak{M}_a$. Оптимальное управление $\sigma_0(x, t) \in \mathfrak{M}_a$ будем называть л о к а л ь н о о п т и м а л ь н ы м. Ниже будут найдены условия, достаточные и «почти необходимые» (в поясненном ниже смысле) для существования оптимального управления. Будет показано, что при выполнении этих условий среди оптимальных управлений существует единственное (в поясненном ниже смысле) локально оптимальное, которое, как оказывается, не зависит от вектора начального состояния $x(0) = a$. Локально оптимальное управление будет найдено в явном виде. Список литературы по решению задач синтеза оптимальных управлений для линейных систем в задачах минимизации функционалов квадратичного типа можно найти в ([1], [2]). Однако авторам неизвестны работы, где для неоднородных систем оптимальное управление найдено в явном виде.

Введем следующие обозначения: $\delta(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$, $A_\lambda{}^{-1}(\lambda I_n - A)^{-1}$. Здесь и ниже через I_n обозначается единичная $n \times n$-матрица. Пусть $\Phi(\lambda)$ — некоторая матрица-функция или просто функция. Будем обозначать $\Phi(\lambda)^\nabla = [\Phi(-\lambda^*)]^*$. Если $\beta(\lambda)$ — наибольший общий делитель многочленов $\beta_1(\lambda)$ и $\beta_2(\lambda)$ (со старшим коэффициентом, равным единице), то будем писать $\langle \beta_1(\lambda), \beta_2(\lambda) \rangle = \beta(\lambda)$.

Распространим квадратичную форму $F(x, \sigma)$ с сохранением эрмитовости на комплексные значения x, σ и определим $m \times m$-матрицы-функции $\pi(i\omega)$, $\alpha(\lambda)$, $\Omega(\lambda)$ и функцию $\varphi(\lambda)$ равенствами

$$\sigma^* \pi(i\omega)\sigma = F(A_{i\omega}^{-1} b\sigma, \sigma), \quad \alpha(\lambda) = \delta(-\lambda)\delta(\lambda)\pi(\lambda),$$

$$\det \alpha(\lambda) = \varphi(\lambda)[\delta(-\lambda)\delta(\lambda)]^{m-1} \det \varkappa, \quad \Omega(\lambda) = \pi(\lambda)^{-1}\varphi(\lambda) \det \varkappa.$$

Здесь σ — произвольный m-вектор, ω — вещественная переменная, λ — комплексная переменная. Ниже для краткости многочлен (матричный многочлен) будем называть вещественным, если все его коэффициенты — вещественные числа (матрицы). Можно показать (см. ([3])), что $\alpha(\lambda)$, $\Omega(\lambda)$, $A_\lambda{}^{-1} b\Omega(\lambda)$ — вещественные матричные многочлены, $\varphi(\lambda)$ — вещественный скалярный многочлен, что $\alpha(\lambda)^\nabla = \alpha(\lambda)$, $\Omega(\lambda)^\nabla = \Omega(\lambda)$, $\varphi(-\lambda) = \varphi(\lambda)$ и что старшими членами многочленов $\alpha(\lambda)$, $\Omega(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$ являются соответственно $(-1)^n \varkappa \lambda^{2n}$, $(-1)^n \varkappa^{-1} \lambda^{2n}$, $(-1)^n \lambda^{2n}$.

Т е о р е м а 1. *Предположим, что при всех вещественных* ω *выполнено неравенство* $\varphi(i\omega) > 0$. *Пусть* $\psi(\lambda)$ *— гурвицев многочлен со старшим членом* λ^n, *удовлетворяющий уравнению факторизации* $\varphi(\lambda) = \psi(-\lambda)\psi(\lambda)$. *Такой многочлен* $\psi(\lambda)$ *существует и притом единственный. Предположим, что* $\varkappa > 0$, $\langle \delta(-\lambda), \delta(\lambda) \rangle = 1$, $\langle \delta(-\lambda), \psi(\lambda) \rangle = 1$, $\langle \delta(\lambda), d\delta(\lambda) / d\lambda \rangle = 1$. *Пусть* $\beta(\lambda)$ *— вещественный матричный многочлен со старшим членом* $\lambda^r I_m$, *удовлетворяющий соотношениям* $\alpha(\lambda) = \beta(\lambda)^\nabla \varkappa \beta(\lambda)$, $\det \beta(\lambda) = \delta(\lambda)^{m-1} \psi(\lambda)$. *Такой многочлен* $\beta(\lambda)$ *существует и притом единственный.*

Тогда для каждого начального вектора a *существует не зависящее от* a *локально оптимальное управление* $\sigma_0 \in \mathfrak{R}_a$. *Такое управление единственно; оно имеет вид*

$$\sigma_0 = c^* x - \varkappa^{-1} b^* \int_t^\infty \exp[C^*(\tau - t)] Hf(\tau)\, dt. \tag{2}$$

Здесь c, C, $H = H^*$ *— вещественные матрицы, которые могут быть найдены следующим образом:*

1) $n \times m$*-матрица* c *находится единственным образом из тождества** $\beta(\lambda) = \delta(\lambda)[I_m - c^* A_\lambda{}^{-1} b]$;

* Соотношение для определения матрицы c после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях λ превращается в линейную систему nm^2 уравнений относительно nm неизвестных элементов матрицы c. Тем не менее эта система имеет решение и притом единственное.

2) $n\times n$*-матрица* C *определяется по формуле* $C=A+bc^*$, *при этом* $\det(\lambda I_n-C)=\psi(\lambda)$;

3) $n\times n$*-матрица* $H=H^*$ *находится единственным образом из матричного уравнения* $C^*H+HC=-D$, *где* $D=D^*$ — *матрица формы* $F(x, c^*x)$.

Доказательство. Пользуясь леммой 3 из ([4]) можно показать, что существует единственный скалярный многочлен $\psi(\lambda)$ и единственный матричный многочлен $\beta(\lambda)$ такие, как указано в формулировке теоремы. Пользуясь результатами ([3]) и леммой 1 из ([5]), § 9, можно показать, что в условиях теоремы существует единственная $n\times m$ вещественная матрица c и единственная $n\times n$ вещественная матрица $H=H^*$, для которых имеют место равенства, приведенные в пунктах 1) — 3) теоремы 1. Кроме того, можно показать, что для матриц c и H, найденных, как указано в теореме, справедливо тождество $F(x,\sigma)=(\sigma-c^*x)^*\varkappa(\sigma-c^*x)-d(x^*Hx)/dt$, где $d(x^*Hx)/dt$ — производная в силу системы (1) с $f(t)\equiv 0$, т. е. $d(x^*Hx)/dt=2x^*H(Ax+b\sigma)$, и что $A+bc^*$ — гурвицева матрица.

Пусть матрицы c, C, H определены так, как указано в теореме 1, и $\sigma_0=\sigma_0(x,t)$ — вектор-функция, определенная равенством (2). Положим $\sigma_h=\sigma_0+\varkappa^{-1}b^*\exp(-C^*t)h$, где h — некоторый (пока произвольный) n-вектор. Можно показать, что $\sigma_0\in\mathfrak{N}_a$ и что имеет место тождество

$$F(x,\sigma)=(\sigma-\sigma_h)^*\varkappa(\sigma-\sigma_h)-dV(x,t,h)/dt+W(t,h), \qquad (3)$$

где $$V(x,t,h)=x^*Hx-2x^*\{\exp(-C^*t)h-\int_0^\infty\exp[C^*(\tau-t)]Hf(\tau)d\tau\},$$

производная $dV(x,t,h)/dt$, взятая в силу системы (1), $W(t,h)$ — не зависящая от x и σ функция такая, что $|W(t,0)|\in M_2$, $|W(t,h)|\in L_2(0,T)$ с любым $T>0$.

Пусть в (3) $h=0$, $\sigma\in\mathfrak{N}_a$, $x=x(t)$ — решение уравнения (1), $x(0)=a$. Проделав несложные оценки, можно показать, что $T^{-1}V[x(T),T,0]\to 0$ при $T\to+\infty$. Разделим обе части равенства (3) на T, проинтегрируем от 0 до T и перейдем к пределу по $T\to+\infty$. Получим

$$J(\sigma)=\overline{\lim_{T\to+\infty}}T^{-1}\int_0^T(\sigma-\sigma_0)^*\varkappa(\sigma-\sigma_0)\,dt+\Gamma,$$

$$\Gamma=\overline{\lim_{T\to+\infty}}T^{-1}\int_0^T W(t,0)\,dt.$$

Отсюда следует, что $\Gamma=J(\sigma_0)$. Так как $\varkappa>0$, то σ_0 — оптимальное управление.

Покажем, что σ_0 является локально оптимальным управлением. Пусть $x_0=x_0(t)$ — решение уравнения 1, соответствующее управлению σ_0, $x_0(0)=a$, $x_0(T)=a_T$ и пусть число T, управление σ, решение x такие, как указано в (л.о.). Аналогично предыдущему, из (3) при $h=0$ найдем

$$J_0^T(\sigma,a)=J_0^T(\sigma_0,a)+\int_0^T(\sigma-\sigma_0)^*\varkappa(\sigma-\sigma_0)\,dt\geqslant J_0^T(\sigma_0,a).$$

Поэтому $\sigma_0\in\mathfrak{M}_a$ и, следовательно, является локально оптимальным управлением, не зависящим от a.

Покажем, что такое управление единственно. Для этого достаточно проверить, что множество $\mathfrak{M}_a$ содержит только одно управление, не зависящее от a. Пусть $\sigma'\in\mathfrak{M}_a$ — не зависящее от вектора a управление, $x'(t)$ — соответствующее ему решение, $T>0$, $x'(0)=a$, $x'(T)=a'$. Пользуясь управляемостью пары (C,b), легко показать, что существует n-вектор h такой, что уравнение (1) с $\sigma=\sigma_h$ имеет решение $x_h=x_h(t)$, $x_h(0)=a$, $x_h(T)=a'$. По свойству л.о. для σ' имеем $J_0^T(\sigma',a)\leqslant J_0^T(\sigma_h,a)$. Аналогично предыдущему, из (3) для выбранного h найдем

$$J_0^T(\sigma', a) = J(\sigma_h, a) + \int_0^T (\sigma' - \sigma_h)^* \varkappa (\sigma' - \sigma_h)\, dt \geqslant J_0^T(\sigma_h, a).$$

Поэтому $J_0^T(\sigma', a) = J_0^T(\sigma_h, a)$ и, следовательно, $\sigma' = \sigma_h$, где $x = x'(t)$, $t \in [0, T]$. Покажем, что найденное h не зависит от T. Действительно, для $T' > T$ имеем $\sigma' = \sigma_{h'}$, при $x = x'(t)$ и $t \in [0, T']$. Поэтому $\sigma_h = \sigma_{h'}$ при $t \in [0, T]$, $x = x'(t)$ и, так как пара (C, b) управляема, то $h = h'$. Расширяя интервал $[0, T]$, получим, что $\sigma' = \sigma_h$ для любого $t \geqslant 0$ и $x = x'(t)$. Так как $\sigma_h = \sigma' \in \mathfrak{M}_a$, то $\sigma_h \in \mathfrak{M}_a$. Из гурвицевости матрицы C и вида σ_h следует, что $h = 0$.

Таким образом, $\sigma' = \sigma_0$ при любых x и t, т. е. σ_0 — единственное не зависящее от a локально оптимальное управление. Теорема доказана.

Процедура нахождения синтезированного оптимального управления σ_0, приведенная в теореме 1, несколько неудобна, поскольку она использует весьма трудоемкую операцию матричной факторизации. Пользуясь результатами ([3]), можно показать (теорема 2), что при определении оптимального уравнения σ_0 процедура матричной факторизации может быть заменена существенно менее трудоемкими операциями определения обратных матриц и операциями деления матричных многочленов на скалярный.

Пусть $\gamma_1(\lambda)$ и $\gamma_2(\lambda)$ — два скалярных многочлена. Через $\text{ост}(\gamma_1 | \gamma_2)$ будем обозначать остаток от деления $\gamma_1(\lambda)$ на $\gamma_2(\lambda)$. Если $\gamma_1(\lambda) = \|\gamma_{ij}(\lambda)\|$ — матричный многочлен, а $\gamma_2(\lambda)$ — скалярный многочлен, то $\text{ост}(\gamma_1, \gamma_2) = \|\text{ост}(\gamma_{ij} | \gamma_2)\|$.

Теорема 2. *Пусть при всех вещественных* ω *выполнено* $\alpha(i\omega) \geqslant 0$, $\varphi(i\omega) \neq 0$ *и пусть* $\langle \delta(-\lambda), \delta(\lambda) \rangle = 1$, $\langle \delta(-\lambda), \psi(\lambda) \rangle = 1$, *где* $\psi(\lambda)$ — *многочлен, определенный в теореме* 1.

Тогда матрица c *в формуле оптимального управления* (2) *однозначно находится из соотношения* $c^* r(\lambda) = \rho(\lambda)$, *где* $\rho(\lambda) = \text{ост}(\Omega / \psi)$, $r(\lambda) = \text{ост}(A_\lambda^{-1} b \Omega / \psi)$.

Теорема 3. *Если хотя бы для одного вектора* s *и одного вещественного числа* ω *имеет место неравенство* $s^* \alpha(i\omega) s < 0$, *то для любого начального вектора* $x(0) = a$ *выполнено соотношение* $\text{Inf}\, J(\sigma) = -\infty$ *по* $\sigma \in \mathfrak{N}_a$.

Доказательство. Пусть μ — вещественное число такое, что $s^* \alpha(i\mu) s < 0$ и $\delta(i\mu) \neq 0$. Из условий теоремы следует, что такое μ существует. Рассмотрим управление $\sigma_\tau = g^* x + s_0 \tau e^{i\mu t}$, где τ — вещественное число, g — вещественная $n \times m$-матрица, такая, что матрица $A + bg^*$ гурвицева, $s_0 = [I_m - g^* A_{i\mu}^{-1} b]$. Легко показать, что для любого τ каждое из управлений $\sigma_1^{(\tau)} = g^* x + \tau \operatorname{Re} s_0 e^{i\mu t}$, $\sigma_\tau^{(2)} = g^* x + \tau \operatorname{Im} s_0 e^{i\mu t}$ принадлежит множеству $\mathfrak{N}_a$. Распространим квадратичную форму $F(x, \sigma)_T$ на комплексные значения x, σ и положим $J_0(\sigma) = \overline{\lim_{T \to +\infty}}\, T^{-1} \int_0^T F(x, \sigma)\, dt$, где $x = x(t)$ — решение уравнения $dx / dt = Ax + b\sigma + (1 + i) f(t)$ с начальным значением $x(0) = (1 + i) a$. Проделав несложные оценки, убедимся, что $J_0(\sigma_\tau) \to -\infty$ при $\tau \to \infty$. Из очевидного равенства $J_0(\sigma_\tau) = J(\sigma_\tau^{(1)}) + J(\sigma_\tau^{(2)})$ следует, что либо $J(\alpha_\tau^{(1)}) \to -\infty$, либо $J(\sigma_\tau^{(2)}) \to -\infty$ при $\tau \to \infty$. Теорема 3 доказана.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
31 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Красовский, Теория управления движением, «Наука», 1968. [2] А. Атанс, П. Фалб, Оптимальные управления, 1968. [3] В. А. Якубович, ДАН, **193**, № 1 (1970). [4] В. А. Якубович, ДАН, **194**, № 3 (1970). [5] В. М. Попов, Гиперустойчивость автоматических систем, «Наука», 1970.