

УДК 517.948.32:539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. А. БАБЕШКО

К ТЕОРИИ И ПРИЛОЖЕНИЯМ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 3 IX 1971)

1. Некоторые краевые задачи теории упругости и математической физики со смешанными граничными условиями приводятся к интегральным уравнениям первого рода следующего вида:

$$\int_a^b k(x, \xi) q(\xi) d\xi = f(x), \quad 0 \leq a \leq x \leq b, \quad (1)$$

$$k(x, \xi) = \sum_{r=1}^{\infty} s_r \begin{pmatrix} \varphi(x, \gamma_r) \theta(\xi, \gamma_r), & x > \xi \\ \varphi(\xi, \gamma_r) \theta(x, \gamma_r), & x < \xi \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь $\varphi(x, \gamma)$, $\theta(x, \gamma)$ — линейно независимые решения дифференциального уравнения с параметром γ

$$y'' + \alpha(x)y' + s(x)y + \gamma^2\beta(x)y = 0, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (3)$$

Свойства решений и ограничения на функции α , β , s будут указаны ниже. Излагается один путь исследования уравнений (1).

Уравнение (3) при достаточно гладких функциях α , β , s , удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, может быть исследовано при $|\gamma| \rightarrow \infty$ методами, изложенными в работах ⁽¹⁻³⁾.

Будем считать, что $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = \int_{\sigma} \theta(x, \eta) d\mu(\eta). \quad (4)$$

Возможность такого представления при различных предположениях относительно функций α , β , s изучается, например, в ⁽⁴⁾. В силу соотношения (4) ограничимся исследованием уравнения (1) в предположении

$$f(x) \equiv \theta(x, \eta), \quad \eta \in \sigma. \quad (5)$$

Введем в рассмотрение функцию вида

$$K(u) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r s_r (\gamma_r^2 - u^2)^{-1}. \quad (6)$$

Здесь постоянные c_r равны произведению вронскиана функций $\varphi(x, \gamma_r)$, $\theta(x, \gamma_r)$ на функцию $p(x) = \exp \int_{x_0}^x \alpha(\xi) d\xi$.

Если ряд (6) равномерно сходится в комплексной плоскости с выброшенными окрестностями точек $u = \gamma_r$, то $K(u)$ — четная мероморфная функция. Допустим, $K(u)$ имеет счетное множество нулей, не лежащих на вещественной оси; нули верхней полуплоскости обозначим z_l .

Построив представление функции $K(u)$ в форме бесконечного произведения, можем ее факторизовать ^(5, 6), т. е. представить (вообще говоря не-

однозначно) в виде

$$K(u) = K_+(u)K_-(u).$$

Здесь функции K_+ , K_- регулярны соответственно в верхней и нижней полуплоскости и не имеют там нулей.

Будем, пока формально, искать решение уравнения (1), (5) в форме ряда Дирихле вида

$$q(\xi, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} [x_l \varphi(\xi, z_l) + y_l \theta(\xi, z_l)] \beta(\xi) p(\xi), \quad (7)$$

$$z_0 = \eta, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = K^{-1}(\eta).$$

Постоянные x_l, y_l подлежат определению.

Внесем соотношение (7) в уравнение (1) и произведем интегрирование. Достаточным условием того, что функция $q(\xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению (1), является выполнение равенств

$$\sum_{l=0}^{\infty} [x_l \langle \theta(a, \gamma_r), \varphi(a, z_l) \rangle + y_l \langle \theta(a, \gamma_r), \theta(a, z_l) \rangle \theta(a, z_l)] = 0, \quad (8)$$

$$- \sum_{l=0}^{\infty} [x_l \langle \varphi(b, \gamma_r), \varphi(b, z_l) \rangle \varphi(b, z_l) + y_l \langle \varphi(b, \gamma_r), \theta(b, z_l) \rangle] = 0, \quad r = 1, 2, \dots$$

Угловые скобки $\langle \rangle$ обозначают следующее:

$$\langle \varphi(x, \lambda), \theta(x, \gamma) \rangle = i d/dx (\ln [\varphi(x, \lambda) \theta^{-1}(x, \gamma)] (\gamma^2 - z_l^2)^{-1}.$$

Соотношения (8) можно рассматривать как уравнения для определения коэффициентов x_l, y_l .

Вводя бесконечные матрицы, систему (8) можем записать в форме

$$B_{11}X + B_{12}Y = D_1, \quad B_{21}X + B_{22}Y = D_2, \quad (9)$$

$$X = \{x_k\}, \quad Y = \{y_k\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

2. Пусть функции α, β, s таковы, что существуют дважды непрерывно дифференцируемые при $0 < x < \infty$ решения φ, θ уравнения (3), обладающие асимптотикой вида

$$\varphi(a, z_l) = \theta(b, z_l) = 1, \quad \varphi'(x, \lambda) = i\lambda \varphi(x, \lambda) [1 + O(\lambda^{-\varepsilon})], \quad (10)$$

$$\theta'(x, \lambda) = -i\lambda \theta(x, \lambda) [1 + O(\lambda^{-\varepsilon})], \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \lambda \rightarrow \infty, \quad \varepsilon > 0.$$

Введем в рассмотрение бесконечную матрицу A с элементами $a_{rl} = (\gamma_r - z_l)^{-1}$. Нетрудно видеть, что в силу (10) при $a \rightarrow \infty$ и $b - a \rightarrow \infty$ матрицы B_{kk} стремятся к A , в то время как B_{12} и B_{21} стремятся к 0.

Бесконечная матрица A в предположении однократности нулей z_l , полюсов γ_r и некоторых ограничениях на их распределение в комплексной плоскости имеет двустороннюю обратную матрицу A^{-1} , элементы которой представимы в форме (7, 8)

$$\tau_{lr} = \{K'_+(-z_l)(\gamma_r - z_l)[K^{-1}(\gamma_r)]'\}^{-1}. \quad (11)$$

Последнее будет справедливо, если существуют функции K_+, K_- , для которых на системе правильных контуров в комплексной плоскости справедливы оценки

$$|K_+(z)| < c|z|^{-\sigma_1}, \quad |K^{-1}(z)| < c|z|^{\sigma_2}, \quad 0 < \sigma_1, \quad \sigma_2 < 1. \quad (12)$$

Пусть, кроме того, имеют место свойства

$$K'_+(-z_l) = l^{-\gamma}(1 + o(1)), \quad [K^{-1}(\gamma_r)]' = r^{\gamma}(1 + o(1)), \quad l, r \rightarrow \infty. \quad (13)$$

В этих предположениях система (9) представима в форме

$$X = A^{-1}(A - B_{11})X - A^{-1}B_{12}Y + A^{-1}D_1, \quad (14)$$

$$Y = A^{-1}(A - B_{22})Y - A^{-1}B_{21}X + A^{-1}D_2.$$

Стоящие в правых частях (14) матрицы порождают непрерывные операторы в пространстве ограниченных последовательностей, сходящихся на бесконечности с весом, т. е. таких, что при $l \rightarrow \infty$ $|l^v x_l| \rightarrow v$.

Оценки (10) позволяют установить, что при достаточно больших a и $b - a$ нормы операторов (14) малы и уравнение можно решать по методу последовательных приближений. Таким путем устанавливается существование решения уравнения (1) при больших значениях указанных параметров. Нетрудно видеть, что это решение находится в классе непрерывных на $[a, b]$ с весом $(b - x)^v(x - a)^v$ функций, т. е. таких, что

$$(b - x)^v(x - a)^v q(x) \in C(a, b). \quad (15)$$

Имея представление (4), можно сформулировать условия на функцию $f(x)$, обеспечивающие свойство (15).

3. Построенное решение будет единственным в классе (15), если только бесконечные системы функций $\varphi(x, z_l)$, $\theta(x, z_l)$ и $\varphi(x, \gamma_r)$, $\theta(x, \gamma_r)$ являются минимальными (усиленно линейно независимыми) ⁽⁹⁾ на отрезке $[a, b]$. Если функции α , β , s являются аналитическими, то минимальность указанных систем можно доказывать, строя операторы преобразования ⁽¹⁰⁾ и используя при этом минимальность экспоненциальных функций ^(8, 11).

4. В условиях п. 2 система (14) является квазирегулярной и проблему ее обращения можно, как известно, свести к решению конечной алгебраической системы. Если решение этой системы единственно, то единственность для уравнения (1) будет иметь место лишь в условиях п. 3.

5. В ряде случаев ⁽⁸⁾ левая часть уравнения (1) представляет положительно определенный оператор в некотором пространстве Соболева — Слободецкого. Если это пространство содержит класс (15), то в этом классе доказывается единственность решения уравнения (1), однако единственность решения системы (14) будет иметь место лишь в малом (при больших a и $b - a$).

Единственность для системы (14) в большом будет иметь место в условиях п. 3.

6. Наконец, если оператор (1) положительно определенный в пространстве, содержащем класс (15), системы φ , θ минимальны, операторы правой части (14) вполне непрерывны в указанном пространстве последовательностей, то система (14) однозначно разрешима в этом пространстве, а интегральное уравнение (1) — в классе (15).

7. П р и м е р ы. Ниже использованы принятые в ⁽¹²⁾ обозначения специальных функций.

1) $\alpha = s = 0$, $\beta = 1$, $\varphi(x, \lambda) = e^{i\lambda(x-a)}$, $\theta(x, \lambda) = e^{i\lambda(b-x)}$; соотношение (4) — разложение Фурье.

Плоские контактные задачи для слоя.

2) $\alpha = x^{-1}$, $\beta = 1$, $s = -nx^{-2}$, $\varphi(x, \lambda) = K_n(-i\lambda x)K_n^{-1}(-i\lambda a)$, $\theta(x, \lambda) = I_n(-i\lambda x)I_n^{-1}(-i\lambda b)$; соотношение (4) — разложение Бесселя.

Осесимметричные контактные задачи для слоя.

3) $\alpha = x^{-1}$, $\beta = -x^{-2}$, $s = v = \text{const}$, $\varphi(x, \lambda) = K_{\lambda i}(-ivx)K_{\lambda i}^{-1}(-iva)$, $\theta(x, \lambda) = I_{\lambda i}(-ivx)I_{\lambda i}^{-1}(-ivb)$; соотношение (4) — разложение Канторовича — Лебедева.

4) $\alpha = -\text{cth } x$, $\beta = 1$, $s = \mu \text{sh}^{-2} x$, $\varphi(x, \lambda) = Q_{-0,5+i\lambda}^{\mu}(\text{ch } x)/Q_{-0,5+i\lambda}^{\mu}(\text{ch } a)$, $\theta(x, \lambda) = P_{-0,5+i\lambda}^{\mu}(\text{ch } x)/P_{-0,5+i\lambda}^{\mu}(\text{ch } b)$;

разложение Меллера — Фока.

Метод настоящей работы применим и в том случае, если уравнение (3) решается на интервале $0 \leq x \leq T$, а $b - a < T$.

5) Периодическая задача ⁽¹³⁾. Соотношение (4) — разложение в ряд Фурье.

6) $\alpha = \operatorname{ctg} x$, $\beta = -\sin^2 x$, $s = \nu(\nu - 1)$, $\varphi(x, \lambda) = P_{\nu-1}^{-i\lambda}(\cos x)/P_{\nu-1}^{-i\lambda}(\cos a)$
 $\theta(x, \lambda) = P_{\nu-1}^{-i\lambda}(-\cos x)/P_{\nu-1}^{-i\lambda}(-\cos b)$.

Действие клиновидного в плане штампа на упругое полупространство.
 Автор выражает благодарность И. И. Воровичу за внимание к работе.

Ростовский
 государственный университет

Поступило
 26 VIII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, УМН, 12, в. 5 (1957). ² В. Вазов, Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1968. ³ М. А. Евграфов, М. В. Федорюк, УМН, 21, в. 1 (1966). ⁴ М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, «Наука», 1969. ⁵ М. Г. Крейн, УМН, 13, в. 5 (1958). ⁶ Б. Нобл, Метод Винера — Хопфа, ИЛ, 1962. ⁷ В. А. Бабешко, ПММ, 30, в. 4 (1966). ⁸ Там же, 35, в. 1 (1971). ⁹ А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, 2, «Наука», 1968. ¹⁰ Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956. ¹¹ А. Ф. Леонтьев, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 39 (1951). ¹² И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., 1962. ¹³ В. А. Бабешко, ДАН, 192, № 1 (1970).