Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 2

УДК 517.944

МАТЕМАТИКА

Е. Г. БАМ-ЗЕЛИКОВИЧ

НЕКОТОРЫЕ НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 22 XI 1971)

В работах ([1-5]) были найдены различные классы локально неразрешимых линейных дифференциальных уравнений с частными производными $Pu = f$. Обзор результатов можно найти в статье ([6]). В настоящей статье рассматриваются линейные операторы первого порядка

$$Pu = D_t u - \sum_{j=1}^{n} (a_j(x,t) + ib_j(x,t)) D_{x_j} u - c(x,t) u,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $D_x = -i\,\partial / \partial x_j$, $a_j \in C^\infty$, $b_j \in C^\infty$, $c \in C^\infty$; для таких операторов будет обобщено достаточное условие локальной неразрешимости Л. Ниренберга и Ф. Тревза ([4]). Тем самым мы получим некоторые необходимые условия локальной разрешимости таких уравнений.

Уравнение $Pu = f$ называется локально разрешимым в точке x_0, если существует окрестность Ω точки x_0 такая, что для любой $f \in C_0^\infty(\Omega)$ найдется $u \in D'(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению $Pu = f$. Пусть P_1 — старшая часть оператора P, $p_1(x, t, \xi, \tau)$ — символ P_1 и $p_1 = A(x, t, \xi, \tau) + iB(x, t, \xi, \tau)$. Пусть существует ненулевой действительный вектор $\xi^0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ и действительное число τ^0 такие, что $p_1 = 0$ в точке $R = (x_0, t_0, \xi^0, \tau^0)$. Основным результатом этой статьи является

Теорема 1. *Если найдется окрестность точки R, в которой $B(x, t, \xi, \tau)$ монотонно растет вдоль нулевой бихарактеристики $A(x, t, \xi, \tau)$, проходящей через точку R, то уравнение $Pu = f$ неразрешимо в точке (x_0, t_0).*

Условия этой теоремы выполнены, например, для уравнения $D_t u + i\varphi(t) D_x u = f$, где $\varphi(t)$ вещественна, монотонна и $\varphi(0) = 0$, если в качестве R взять точку $(0, 0, 0, 1)$. Отметим, что локальная неразрешимость этого уравнения другими методами была установлена в ([7]).

Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$, $t_0 = 0$. Сделаем преобразование координат так, чтобы бихарактеристики $A(x, t, \xi, \tau)$ стали параллельны координатной оси t. Пусть $a = (a_1(x, t), \ldots, a_n(x, t))$, положим $y = y(x, t)$, $s = t$, где $y(x, t)$ — решение следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + J\left(\frac{y}{x}\right) a, \quad y|_{t=0} = x, \quad J\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Тогда уравнение $Pu = f$ перейдет в уравнение $\tilde{P}u = \tilde{f}$, $p_1(x, t, \xi, \tau)$ перейдет в $\tilde{p}_1(y, s, \eta, \sigma) = \sigma - i\sum \tilde{b}_j(y, s)\eta_j$; R перейдет в точку $\tilde{R} = (0, 0, \xi^0, 0)$. Положим $\tilde{A} = \sigma$, $\tilde{B} = -\sum \tilde{b}_j(y, s)\eta_j$, бихарактеристики $\tilde{A}$ будут параллельны оси s. Так как нулевая бихарактеристика инвариантна относительно преобразования координат, то, как это следует из условий теоремы 1, $\tilde{B}(0, s, \xi^0)$ монотонно убывает по s в окрестности нуля, $\xi^0 \neq 0$ и $\tilde{B}(0, 0, \xi^0) = 0$.

В ([2]), стр. 212, доказана следующая

Лемма. *Пусть дифференциальное уравнение $Pu = F$ локально разрешимо в x_0; тогда существуют такие константы C, k, N и окрестность W точки x_0, что, как только f, $v \in C_0^\infty(W)$,*

$$\left|\int fv\,dx\right| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup|D^\alpha f| \sum_{|\beta|\leqslant N} \sup|D^{\beta t} Pv|. \tag{1}$$

Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что неравенство (1) не может иметь место ни при каких C, k, N, если оператор P заменить на $\tilde{P}$, W — достаточно малая окрестность начала координат.

Лемма 1. *Если уравнение $Pu = f$ локально разрешимо в проколотой окрестности точки R и выполнены условия теоремы 1, то для любого натурального r существует функция $\omega(y, s)$ такая, что $\omega = \omega_1 + \omega_2$ и выполнены следующие условия:*

1) $\operatorname{Re}\omega_1 > 0$ *при* $y^2 + s^2 \neq 0$ *в некоторой окрестности начала координат;*

2) $|\omega_2| = o(\operatorname{Re}\omega_1)$ *при* $(y, s) \to 0$;

3) $\tilde{p}_1(y, s, D_y\omega) = O((\operatorname{Re}\omega_1)^r)$ *при* $(y, s) \to 0$.

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$D_s\omega = i\sum \tilde{b}_j(y, s)\, D_{y_j}\omega, \tag{2}$$

$$\omega|_{s=0} = i\langle\xi^0, y\rangle + |y|^2. \tag{3}$$

В работе ([2]) предполагалась аналитичность коэффициентов $\tilde{b}_j$ и по теореме Коши — Ковалевской эта задача Коши имела аналитическое решение в окрестности начала координат. Мы не предполагали аналитичности $\tilde{b}_j$, поэтому задача не решается точно, и мы будем искать ω так, чтобы начальные условия (3) удовлетворялись точно, а уравнение (2) — с точностью до $O(|y|^{2r})$. Для этого разложим $\tilde{b}_j(y, s)$ в ряд Тейлора по y до членов порядка $|y|^{2r+1}$ и будем искать ω в виде

$$\omega = \sum_{|\alpha|\leqslant 2r} f_\alpha(s)\, y_1^{\alpha_1} \ldots y_n^{\alpha_n},$$

где $f_\alpha(s)$ — пока не известные функции. Подставим это выражение для ω в (2). Приравнивая в левой и правой частях (2) коэффициенты при одинаковых степенях y, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $f_\alpha(s)$; из (3) получим начальные значения для $f_\alpha(s)$ при $s = 0$. Найдем отсюда $f_\alpha(s)$ и покажем, что $\omega = \sum f_\alpha(s)\, y^\alpha$ удовлетворяет условиям леммы. Положим

$$\omega_1(y, s) = i\langle\xi^0, y\rangle + |y|^2 + \int_0^s\{-\tilde{B}(0, s', \xi^0)\}\, ds'.$$

Так как $\tilde{B}(0, s, \xi^0)$ монотонно убывает, то первый пункт леммы выполнен. По построению ω имеем, что $\tilde{p}_1\omega = O(|y|^{2r}) = O((\operatorname{Re}\omega_1)^r)$.

Остается доказать второй пункт леммы, для этого докажем неравенство

$$|\omega_2(y, s)| \leqslant (\sqrt{|s|} + |y|)\operatorname{Re}\omega_1(y, s), \qquad \omega_2 = \omega - \omega_1. \tag{4}$$

Можно считать, что найдется окрестность начала координат, в которой выполнено необходимое условие разрешимости Хёрмандера для уравнения $\tilde{P}u = \tilde{f}$; это означает, что из $\tilde{B}(y, s, \eta) = 0$ следует $\tilde{B}_s(y, s, \eta) = 0$; учитывая, что $\tilde{B}$ монотонно убывает по s и $\tilde{B}(0, 0, \xi^0) = 0$, мы видим, что функция $\tilde{B}(y, s, \eta)$ удовлетворяет условиям леммы о дважды дифференцируемых функциях из статьи ([4]) и, следовательно,

$$|\operatorname*{grad}_{y,\eta} \tilde{B}(0, s, \xi^0)| \leqslant C\,|\tilde{B}(0, s, \xi^0)|^{1/2}. \tag{5}$$

Для доказательства неравенства (4) разложим левую и правую части уравнения (2) следующим образом:

$$\omega(y,s) = i\langle\xi^0, y\rangle + |y|^2 + \sum_0^2 u_k(y,s) + \bar{u}(y,s),$$

$$\tilde{B}(y, s, \eta) = B_0(y, s, \eta) + B_1(y, s, \eta) + \bar{B}(y, s, \eta),$$

где u_k, B_k — однородные полиномы по y степени k,

$$\bar{u}(y, s) = o(|y|^2), \qquad \bar{B}(y, s, \eta) = o(|y|^2).$$

Из начальных условий (3) вытекает, что $u_k(0, y) = 0$, следовательно, $|u_2(y,s)| \leqslant C|s|\,|y|^2$. Отсюда получаем, что

$$|u_2| + |\bar{u}(y, s)| = o(\operatorname{Re}\omega_1). \tag{6}$$

Приравнивая в уравнении (2) члены одинаковой однородности по y, получаем для $k = 0, 1$

$$D_s u_0 = i\tilde{B}_0(s, \xi^0 + D_y u_1), \tag{7}$$

$$D_s u_1 = i\tilde{B}_1(y, s, \xi^0 + D_y u_1) + i\langle \operatorname{grad} \tilde{B}_0(s, \xi^0 + D_y u_1),\ D_y u_2 - 2iy\rangle. \tag{8}$$

Рассмотрим соотношения (7), (8) как систему обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной s и искомыми функциями — коэффициентами многочленов относительно y_j. Коэффициенты в $u_2(y, s)$ будем рассматривать как данные, используя лишь то, что в малой окрестности начала координат они ограничены и принадлежат C^∞. Это верно и для коэффициентов в u_0 и u_1. Пусть $u_1 = \sum\limits_r u_{1r} y_r$, тогда из соотношения (8) получаем

$$D_s u_1 = i\tilde{B}_1(y_1, s, \xi^0) + i\langle \operatorname{grad} \tilde{B}_0(s, \xi^0),\ D_y u_2 - 2iy\rangle + \Phi_1(y, s, u_{1r}),$$

где $\Phi_1 \in C^\infty$ и $\Phi_1(y, s, 0) = 0$. По определению $\tilde{B}_0$ и $\tilde{B}_1$ имеем

$$\operatorname{grad}_\eta \tilde{B}_0(s, \xi^0) = \operatorname{grad}_\eta \tilde{B}(0, s, \xi^0),$$

$$B_1(y, s, \xi^0) = \langle y, \operatorname{grad}_y \tilde{B}(0, s, \xi^0)\rangle.$$

Используя неравенство (5) и замечая, что u_2 — квадратичная форма с ограниченными коэффициентами относительно y, а $\Phi_1(y, s, 0) = 0$, получаем при достаточно малых s

$$|D_s u_{1r}| \leqslant C_1\Big(\sum_\mu |u_{1\mu}| + |\tilde{B}(0, s, \xi^0)|^{1/2}\Big).$$

Так как $u_{1r}(0) = 0$, то $|u_{1r}| \leqslant C_2\int\limits_0^s |\tilde{B}(0, s', \xi^0)|^{1/2} ds'$ с помощью неравенства Коши — Буняковского отсюда получаем

$$|u_1| \leqslant C_2\Big(|s|\int_0^s \{-\tilde{B}(0, s', \xi^0)\}\, ds'\Big)^{1/2} |y|, \tag{9}$$

следовательно,

$$|u_1| \leqslant C_2\sqrt{|s|}\Big(|y|^2 + \int_0^s \{-\tilde{B}(0, s', \xi^0)\}\, ds'\Big). \tag{10}$$

Из уравнения (7) получаем

$$\Big|\frac{du_0}{ds} + \tilde{B}(0, s, \xi^0)\Big| \leqslant |\langle \operatorname{grad}_\eta \tilde{B}(0, s, \xi^0), D_y u_1\rangle| + C_3 |D_y u_1|^2;$$

теперь из (5) и (9) имеем

$$\Big|\frac{du_0}{ds} + \tilde{B}(0, s, \xi^0)\Big| \leqslant C_4\ \Big(|s|\int_0^s \{-\tilde{B}(0, s', \xi^0)\}\, ds'\Big)^{1/2}\ |B(0, s, \xi^0)|^{1/2} +$$

$$+ |s|\int_0^s \{-B(0, s', \xi^0)\}\, ds';$$

так как $u_0 = 0$ при $s = 0$, то

$$\left| u_0 - \int_0^s \{-\tilde{B}(0, s', \xi^0)\} ds' \right| \leqslant C_5 |s| \int_0^s \{-\tilde{B}(0, s', \xi^0)\} ds'. \tag{11}$$

Сравнивая (6), (10), (11), получаем неравенство (4); лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1 проводится аналогично доказательству теоремы 6.1.1. в ([2]). Для этого строятся такие функции f_τ и v_τ, что при больших τ оценка (1) нарушается. Функции f_τ выбираются такие же, как и в теореме 6.1.1.; выберем

$$v_\tau = \tau^{n+1+k} e^{-\tau\omega} \varphi(y, s),$$

где ω — функция, найденная в лемме 1 для $r = n + 3 + k + N$. Функцию же $\varphi(y, s)$ надо выбрать так, чтобы

1) $\varphi(0) = 1$;

2) φ должна иметь носитель в достаточно малой окрестности нуля;

3) $\sup |D^\alpha {}^t\tilde{P} v_\tau| \leqslant C$ для $\tau \geqslant 1$, $|\alpha| \leqslant N$.

Рассмотрим задачу

$${}^t\tilde{P}\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1(y, 0) = 1. \tag{12}$$

Так же как и в лемме 1, найдем функцию φ_1, удовлетворяющую уравнению (12) с точностью до $O(|y|^{2(n+2+k+N)})$ и точно удовлетворяющую начальным данным. Пусть $\psi(y, s)$ — срезающая функция: ее носитель лежит в окрестности начала координат и $\psi(y, s) = 1$ в меньшей окрестности. Положим $\varphi = \varphi_1\psi$, тогда φ удовлетворяет требованиям 1) и 2); докажем, что 3) тоже выполнено. Заметим, что $\tilde{P}_1\omega = -{}^t\tilde{P}_1\omega$, где $\tilde{P}_1$ и ${}^t\tilde{P}_1$ — старшие части операторов $\tilde{P}$ и ${}^t\tilde{P}$, тогда ${}^t\tilde{P}(e^{-\tau\omega}\varphi) = e^{-\tau\omega}(\tau\tilde{P}_1\omega + {}^t\tilde{P}\varphi)$. Чтобы доказать неравенство $\sup|D^\alpha {}^t\tilde{P}v_\tau| \leqslant C$ теперь достаточно использовать следующее утверждение.

Лемма 2. *Если* $|\psi(y, s)| = O(|y|^{2s})$ *при* $y \to 0$, $\psi(y, s) \in C^\infty$, *то в достаточно малой окрестности начала координат*

$$\sup |D^\alpha(\psi e^{-\tau\omega})| = O(\tau^{|\alpha|-s}).$$

Доказательство. Так как $\mathrm{Re}\,\omega \geqslant a$, $\mathrm{Re}\,\omega_1 \geqslant 0$ в окрестности нуля, $a > 0$, то достаточно доказать, что для $s > |\alpha|$, $\sup|e^{-\tau\omega}D^\alpha\psi| = O(\tau^{|\alpha|-s})$. Действительно,

$$D^\alpha\psi = O(|y|^{2s-2|\alpha|}) = O((\mathrm{Re}\,\omega_1)^{s-|\alpha|}).$$

Следовательно,

$$\tau^{s-|\alpha|} \sup |e^{-\tau\omega}D^\alpha\psi| \leqslant C \sup e^{-\tau\alpha \,\mathrm{Re}\,\omega_1}(a\tau\,\mathrm{Re}\,\omega_1)^{s-|\alpha|};$$

легко видеть, что правая часть последнего неравенства ограничена.

Автор выражает благодарность В. В. Грушину за полезные советы.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 15 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Lewy, Ann. Math., **66**, № 2, 155 (1957). [2] Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965. [3] L. Nirenberg, F. Treves, Comm. Pure and Appl. Math., **16**, 331 (1963). [4] L. Nirenberg, F. Treves, ibid., **23**, № 1, 1 (1970). [5] Ю. В. Егоров, ДАН, **187**, № 6, 1232 (1969). [6] Ю. В. Егоров, УМН, **158**, № 2, 183 (1971). [7] В. В. Грушин, Математические заметки, **10**, № 2, 125 (1971).