

Член-корреспондент АН СССР Ю. Л. ЕРШОВ

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЯХ ГРУПП

Основными результатами по проблеме разрешимости для элементарных теорий групп и классов групп являются неразрешимость элементарной теории класса всех групп (А. Тарский), неразрешимость элементарной теории класса всех конечных групп (А. И. Мальцев) и разрешимость элементарной теории класса всех абелевых групп (В. Шмелева). В настоящей статье будут даны теоремы, которые показывают, что группы или классы групп, в определенном смысле далекие от абелевых, имеют неразрешимую теорию. Все необходимые определения, связанные с проблемой разрешимости для элементарных теорий, можно найти в ⁽²⁾.

Первая теорема доказана в связи с проблемой А. Тарского: *Не будет ли всякое многообразие групп, собственно содержащее многообразие всех абелевых групп, иметь неразрешимую теорию?*

Теорема 1. *Всякое многообразие групп, содержащее неабелеву конечную группу, имеет неразрешимую теорию.*

Заметим, что пока неизвестно ⁽³⁾, проблема 5) примера неабелевого многообразия, все конечные группы которого абелевы.

Теорема 1 делает вероятной более сильную, чем проблема А. Тарского гипотезу, что *всякое неабелево многообразие имеет неразрешимую теорию.*

Доказательство теоремы 1 основано на следующих предложениях, которые приведем здесь без доказательства.

Предложение 1. *Всякое многообразие групп, содержащее неабелеву конечную группу, содержит в качестве подмногообразия одно (или совпадает с одним) из следующих многообразий:*

1) $\mathfrak{N}_2^p$ — многообразие двуступенно нильпотентных групп экспоненты p , где p — простое число, большее 2;

2) $\mathfrak{N}_2^{4,2}$ — многообразие двуступенно нильпотентных групп экспоненты 4 с коммутантом экспоненты 2;

3) $\mathfrak{A}^p\mathfrak{A}^q$ — произведение многообразий элементарных абелевых групп экспонент p и q , где p и q — различные простые числа.

Это предложение по существу хорошо известно, хотя и не было нигде сформулировано в такой форме.

Предложение 2. *Многообразие $\mathfrak{N}_2^p$, $p > 2$, имеет наследственно неразрешимую теорию.*

Предложение 3. *Многообразие $\mathfrak{N}_2^{4,2}$ имеет наследственно неразрешимую теорию.*

Предложение 4. *Многообразие $\mathfrak{A}^p\mathfrak{A}^q$, p, q — различные простые числа, имеет наследственно неразрешимую теорию.*

В доказательствах предложений 2—4 используется метод относительной элементарной определимости, предложенный в статье автора ⁽¹⁾.

Несмотря на неразрешимость теории многообразия $\mathfrak{N}_2^p$, в этом многообразии имеется весьма интересный класс групп, имеющий уже разрешимую теорию.

Предложение 5. *Класс всех свободных групп многообразия $\mathfrak{N}_2^p$ имеет разрешимую теорию.*

Следующая теорема отвечает положительно на гипотезу, высказанную в работе ⁽⁴⁾.

Теорема 2. *Элементарная теория конечно-порожденной нильпотентной группы разрешима тогда и только тогда, когда она является конечным расширением своего центра.*

Заметим, что для конечно-порожденной нильпотентной группы G следующие условия эквивалентны:

- 1) G — конечное расширение центра;
- 2) G — конечное расширение абелевой группы;
- 3) если T — периодическая часть G , то G/T — абелева.

Положительная часть теоремы достаточно проста и следует из следующего, чуть более общего утверждения.

Предложение 6. *Конечное расширение любой конечно-порожденной абелевой группы имеет разрешимую элементарную теорию.*

Используя систему факторов и обобщенные произведения $(^2)$, можно вопрос о разрешимости свести к вопросу разрешимости элементарной теории конечно-порожденной абелевой группы с конечным числом констант. Разрешимость последней теории достаточно очевидна.

Укажем теперь основные этапы доказательства отрицательной части. Пусть G — конечно-порожденная нильпотентная группа. Так как множество всех элементов конечного порядка образует конечную подгруппу T в G , то T — формульная подгруппа. Поэтому для доказательства неразрешимости теории G достаточно доказать неразрешимость теории G/T .

Будем предполагать далее, что G — неабелева нильпотентная группа без кручения. Так как все члены верхнего центрального ряда группы G , очевидно, формульны, то существует такой формульный член верхнего центрального ряда G_0 , что G/G_0 — двуступенно нильпотентна. Так как G_0 — изолированная подгруппа, то G/G_0 — без кручения.

Итак, достаточно рассматривать случай, когда G — двуступенно нильпотентная группа без кручения.

Переходя к относительно формульным (формульным относительно выделенных элементов в G) подгруппам, можно добиться, чтобы централизатор C_a любого не центрального элемента a был абелев. Действительно, если C_a не абелев, то можно от G перейти к C_a , причем центр группы C_a увеличился по сравнению с центром группы G (так как элемент a лежит в центре C_a). Так как G удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, то, проделав конечное число указанных преобразований, найдем относительно формульную неабелеву подгруппу такую, что для любого нецентрального элемента централизатор абелев.

Пусть G — двуступенно нильпотентная группа без кручения такая, что централизатор любого нецентрального элемента G абелев. Пусть C — центр G , а a, b — два некоммутирующих элемента в G . C_a и C_b — централизаторы элементов a и b соответственно. Из условия коммутативности централизаторов вытекает, что $C_a \cap C_b = C$. Рассмотрим две подгруппы C^0, C^1 центра, определенные так: $C^0 = [a, C_b]$, $C^1 = [b, C_a]$. Положим $C_0 = C^0 \cap C^1$. Заметим, что коммутатор $c = [a, b] \in C_0$.

Далее, следуя работе $(^3)$, определим на C_0 бинарную операцию $\times$, по со значениями в C , в отличие от ситуации, рассмотренной в $(^5)$.

Полагаем для $z_0, z_1 \in C_0$: если $x_0 \in C_a, x_1 \in C_b$ таковы, что $z_0 = [a, x_1]$, $z_1 = [x_0, b]$, то $z_0 \times z_1 = [x_0, x_1] \in C$, условие $C_a \cap C_b = C$ гарантирует корректность определения. Заметим, что для любого $z \in C_0$ $z \times c = c \times z = z$. Далее, если записывать операцию умножения в C аддитивно, то «умножение» $\times$ дистрибутивно: $(z_0 + z_1) \times z = (z_0 \times z) + (z_1 \times z)$ и $z \times (z_0 + z_1) = (z \times z_0) + (z \times z_1)$; это легко вытекает из следующих свойств коммутатора в двуступенно нильпотентной группе:

$$[x, yz] = [x, y][x, z], \quad [yz, x] = [y, x][z, x].$$

Займемся теперь более подробно следующими объектами: $(K, K_0, +, \times)$, где K — абелева группа относительно сложения $+$, K_0 — подгруппа K , а $\times$ — билинейное отображение из $K_0 \times K_0$ в K , т.е. гомоморфизм $\times$:

$K_0 \otimes K_0 \rightarrow K$. Предположим еще, что K_0 содержит единицу c , т. е. такой элемент, что для любого $x \in K_0$ $c \times x = x \times c = x$. Определим следующие множества:

$$K_1 \Leftarrow \{x | x \in K_0 \text{ и } \forall y \in K_0 (x \times y \in K_0)\};$$

$$K_2 \Leftarrow \{x | x \in K_1 \text{ и } \forall y \in K_1 \forall z \in K_0 [x \times (y \times z) = (x \times y) \times z]\};$$

$$K_3 \Leftarrow \{x | x \in K_2 \text{ и } \forall y \in K_2 (x \times y = y \times x)\}.$$

Имеем следующие соотношения: $K_0 \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3$. Легко проверяется, что все множества K_i являются подгруппами K и содержат элемент c . Покажем, что K_2 и K_3 замкнуты относительно умножения $\times$. Достаточно проверить это для K_2 :

Пусть $x, y \in K_2, z \in K_1, u \in K_0$, тогда $y \times z \in K_1$, так как для любого $t \in K_0$ $(y \times z) \times t = y \times (z \times t) \in K_0$, поэтому $(x \times y) \times (z \times u) = x \times (y \times (z \times u)) = x \times ((y \times z) \times u) = (x \times (y \times z)) \times u = ((x \times y) \times z) \times u$. Следовательно, $x \times y \in K_2$. Поэтому K_2 — ассоциативное кольцо с единицей c , а K_3 — его центр.

Если предположить еще, что K — свободная абелева группа конечного ранга, то K_3 будет коммутативным ассоциативным нётеровым кольцом (и конечным $\mathbb{Z}$ -модулем) с аддитивной группой без кручения. Так как K_3 содержит единицу, то кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ является подкольцом K_3 . Пусть $\mathfrak{p}$ — произвольный простой идеал, принадлежащий нулевому идеалу, тогда $\mathfrak{p}$ состоит из делителей нуля (следствие теоремы Ласкера — Нётер ⁽³⁾) и поэтому $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$. Так как K_3 нётерово, то существуют элементы $a_1, \dots, a_n \in K_3$ такие, что $\mathfrak{p} = a_1 K_3 + \dots + a_n K_3$. Это равенство показывает, что $\mathfrak{p}$ — формульный (относительно $a_1, \dots, a_n$) идеал в K_3 . Пусть $R \Leftarrow K_3/\mathfrak{p}$, тогда R — коммутативная область целостности характеристики 0 (так как $\mathbb{Z} \subseteq R$) и R — конечный $\mathbb{Z}$ -модуль. Следовательно ⁽³⁾, R — конечное целое расширение $\mathbb{Z}$, т. е. R — кольцо целых алгебраических чисел.

Все проведенные построения показывают, что в конечно-порожденной нильпотентной группе G , не являющейся конечным расширением центра, относительно элементарно определимо некоторое кольцо целых алгебраических чисел. В работе ⁽⁶⁾ было доказано, что во всяком кольце целых алгебраических чисел определимо кольцо целых рациональных чисел, имеющее наследственно неразрешимую теорию. Тогда предложение 1 работы ⁽¹⁾, являющееся сущностью метода относительной элементарной определимости, показывает, что элементарная теория группы G неразрешима.

Замечание 1. Найденная А. И. Мальцевым ⁽⁵⁾ весьма полезная связь между кольцами и двуступенно нильпотентными группами может быть расширена за счет дальнейшего расширения понятия кольца. Так, кольцо K — это абелева группа вместе с гомоморфизмом $\varphi: K \otimes K \rightarrow K$. Если все три «буквы» K сделать, вообще говоря, различными абелевыми группами, т. е. рассмотреть гомоморфизм $\varphi: A \otimes B \rightarrow C$ тензорного произведения абелевых групп A и B в абелеву группу C , то и по этой системе (A, B, C, φ) можно построить двуступенно нильпотентную группу $G(A, B, C, \varphi)$, элементами которой являются тройки (α, β, γ) , $\alpha \in A, \beta \in B, \gamma \in C$, а операция умножения вводится по правилу $(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (\alpha', \beta', \gamma') \Leftarrow (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' + \varphi(\alpha \otimes \beta'))$. Таким образом, систему (A, B, C, φ) можно рассматривать как обобщенное кольцо; более узкие понятия получают, когда A и B — подгруппы C ; такая система получилась бы в нашем построении, если бы в качестве A взять C^0 , а в качестве B — C^1 с уже определенным умножением. Еще более узкое понятие, когда $A = B \subseteq C$; этот случай и изучался; когда же $A = B = C$, то приходим к обычному понятию кольца. Можно указать ряд условий для представимости двуступенно нильпотентной группы в виде $G(A, B, C, \varphi)$ и расширить соответствие А. И. Мальцева на более широкий класс групп и обобщенных колец.

Замечание 2. В работе ⁽⁴⁾ был поставлен также вопрос о разреши-

мости универсальной теории всякой конечно-порожденной нильпотентной группы. Используя соответствие А. И. Мальцева и результат Ю. В. Матиясевича о неразрешимости универсальной теории кольца целых чисел, можно без труда доказать, что универсальная теория свободной двуступенно нильпотентной группы с двумя образующими и с константами для образующих в сигнатуре имеет неразрешимую теорию. По-видимому, результат справедлив и без констант в сигнатуре.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
6 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ю. Л. Ершов, ДАН, 161, № 1, 27 (1965). ² Ю. Л. Ершов, И. А. Лавров и др., УМН, 20, № 4, 37 (1965). ³ О. Зарисский, П. Самюэль, Коммутативная алгебра, 1, М., 1963. ⁴ М. И. Каргаполов, В. Н. Ремесленников и др., Алгебра и логика, 8, № 6, 643 (1969). ⁵ А. И. Мальцев, Матем. сборн., 50, 257 (1960). ⁶ J. Robinson, Proc. Am. Math. Soc., 10, 950 (1959). ⁷ Х. Нейман, Многообразия групп, М., 1969.