

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ:
ПЛОСКИЕ ФИГУРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА,
ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Практическое пособие

для студентов
математических специальностей ВУЗов

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2025

УДК 514.123.1(076)
ББК 22.151.54я73
А64

Авторы:
А. В. Бузланов, И. В. Близнец,
Р. В. Бородич, Е. Н. Бородич

Рецензенты:

доктор физико-математических наук С. Ф. Каморников,
кандидат физико-математических наук Е. А. Задорожнюк

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
учреждения образования «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»

**Аналитическая геометрия: плоские фигуры второго по-
рядка, прямая и плоскость в пространстве** : практическое
А64 пособие / А. В. Бузланов [и др.] ; Гомельский гос. ун-т
им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2025. – 46 с.
ISBN 978-985-32-0121-5

Практическое пособие включает следующие разделы аналитической геометрии: плоские фигуры второго порядка, прямая и плоскость в пространстве. По каждой теме кратко изложены элементы теории, приведены образцы решения типовых задач, предложены индивидуальные задания.

Адресовано студентам математических специальностей ВУЗов и может быть также использовано студентами других специальностей, изучающими вопросы аналитической геометрии.

УДК 514.123.1(076)
ББК 22.151.54я73

ISBN 978-985-32-0121-5

© Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины», 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

1	Плоские фигуры второго порядка	4
1.1	Элементы теории	4
1.1.1	Плоские фигуры второго порядка	4
1.1.2	Окружность	4
1.1.3	Эллипс	5
1.1.4	Гипербола	6
1.1.5	Парабола	7
1.1.6	Преобразование системы координат на плоскости	8
1.1.7	Виды плоских фигур второго порядка	9
1.2	Примеры решения задач	10
1.3	Индивидуальные задания	20
2	Прямая и плоскость в пространстве	26
2.1	Элементы теории	26
2.1.1	Простейшие задачи аналитической геометрии в пространстве	26
2.1.2	Виды уравнений плоскости	26
2.1.3	Расстояние от точки до плоскости	28
2.1.4	Взаимное расположение плоскостей	28
2.1.5	Виды уравнений прямой в пространстве	29
2.1.6	Взаимное расположение двух прямых в пространстве	31
2.1.7	Угол между двумя прямыми в пространстве	33
2.1.8	Расстояние от точки до прямой в пространстве	33
2.1.9	Взаимное расположение прямой и плоскости	33
2.1.10	Угол между прямой и плоскостью	34
2.2	Примеры решения задач	34
2.3	Индивидуальные задания	42

1 ПЛОСКИЕ ФИГУРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1.1 Элементы теории

1.1.1 Плоские фигуры второго порядка

Плоской фигурой второго порядка называется множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где A, B, C, D, E, F – действительные числа, причем числа A, B и C одновременно не равны нулю.

Рассмотрим нескольких видов плоских фигур второго порядка: окружность, эллипс, гиперболу и параболу. Их называют *кривыми второго порядка*.

1.1.2 Окружность

Окружностью радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется множество всех точек плоскости, удалённых на расстояние R от точки M_0 (рис. 1.1).

Уравнение такой окружности имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

В частности, уравнение

$$x^2 + y^2 = R^2$$

определяет окружность радиуса R с центром в начале координат $O(0,0)$ (рис. 1.2).

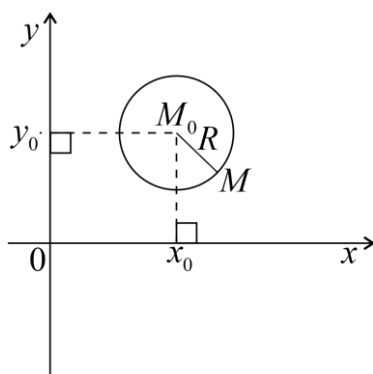


Рис. 1.1

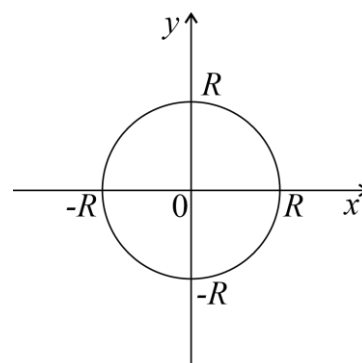


Рис. 1.2

1.1.3 Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная и большая, чем расстояние между фокусами.

Если фокусы эллипса выбрать в точках $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c \geq 0$, постоянную величину в определении эллипса обозначить $2a$, то уравнение эллипса можно записать в виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b > 0$ и определяется из равенства $b^2 = a^2 - c^2$. Это уравнение называют *каноническим уравнением эллипса*. Изображение эллипса в прямоугольной декартовой системе координат показано на рис. 1.3.

Оси симметрии эллипса называют *осями эллипса*. На рис. 1.3 они совпадают с координатными осями. Точка пересечения осей эллипса называется *центром эллипса*. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 пересечения эллипса с его осями называют *вершинами эллипса*. Полуосями эллипса

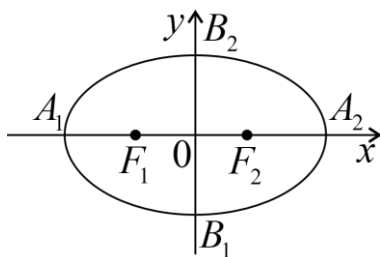


Рис. 1.3

называют отрезки OA_2 и OB_2 , а также их длины a и b , соответственно. Из равенства $b^2 = a^2 - c^2$ следует, что $a > b$, если $c \neq 0$. Поэтому a называют *большой полуосью*, а b — *малой полуосью*. *Эксцентриситетом эллипса* называют число:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Так как $0 \leq c < a$, то $0 \leq \varepsilon < 1$. Эксцентриситет эллипса характеризует его форму. Чем ближе ε к 1, тем больше эллипс «сжат» по оси ординат.

Если уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1,$$

где $q > p > 0$, то фокусы эллипса $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$ расположены на оси Oy , q — большая полуось, p — малая полуось и $p^2 = q^2 - c^2$, где $c \geq 0$. Такой эллипс изображён на рис. 1.4.

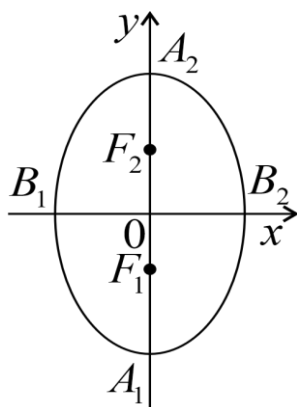


Рис. 1.4

Наконец, если у эллипса с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

полуоси равны, т. е. $a = b$, то его уравнение можно записать в виде:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Это уравнение окружности радиуса a с центром в начале координат. Поэтому окружность можно рассматривать как эллипс с равными полуосями. Фокусы такого эллипса совпадают с центром окружности, а его эксцентриситет равен нулю.

1.1.4 Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная и меньшая, чем расстояние между фокусами.

Если фокусы гиперболы выбрать в точках $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c > 0$, постоянную величину в определении гиперболы обозначить $2a$, где $0 < a < c$, то уравнение гиперболы можно записать в виде:

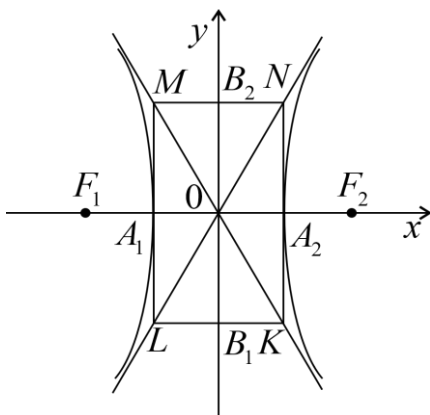


Рис. 1.5

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b > 0$ и определяется из равенства $b^2 = c^2 - a^2$. Это уравнение называют *каноническим уравнением гиперболы*. Изображение гиперболы в прямоугольной декартовой системе координат показано на рис. 1.5.

Оси симметрии гиперболы называют *осями гиперболы*. На рис. 1.5 они совпадают с координатными осями. Ось, которую гипербола пересекает, называют *действительной осью*. Другую ось гиперболы называют *мнимой*. Точка пересечения осей гиперболы является центром симметрии гиперболы и называется *центром гиперболы*. На рис. 1.5 центр гиперболы находится в начале координат $O(0, 0)$. Точки $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ пересечения гиперболы с действительной осью, называют *вершинами гиперболы*. Величины a и b называют *полуосями гиперболы*. Если $a = b$, то гипер-

бола называется *равносторонней*. Прямоугольник $MNKL$ (рис. 1.5), стороны которого проходят через точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ и параллельны осям гиперболы, называется *основным прямоугольником гиперболы*. С его построения и начинают изображать гиперболу. Прямые на которых лежат диагонали основного прямоугольника гиперболы, называют *асимптотами гиперболы*. Их у гиперболы две

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Гипербола – это фигура, состоящая из двух отдельных ветвей. Ветви гиперболы неограниченно приближаются к асимптотам при $x \rightarrow \pm\infty$.

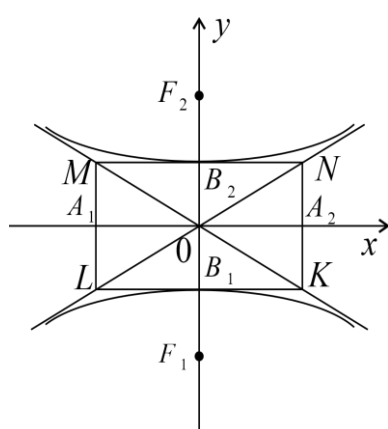


Рис. 1.6

Уравнение

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

также определяет гиперболу (рис. 1.6). Но фокусы F_1 и F_2 этой гиперболы расположены на оси Oy . Основной прямоугольник и асимптоты такие же как гиперболы на рис. 1.5.

Величину $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называют *эксцентриситетом* гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Очевидно, что $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет характеризуют форму гиперболы: чем меньше ε , тем больше ветви гиперболы «приближаются» к действительной оси.

1.1.5 Парабола

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой *фокусом*, и от данной прямой, называемой *директрисой*. Расстояние от фокуса до директрисы называется *параметром параболы* и обозначается буквой p .

Пусть задан параметр p параболы. Если фокус параболы расположен в точке $F(p/2, 0)$, а в качестве директрисы взять прямую $x = -p/2$, то уравнение параболы можно записать в виде $y^2 = 2px$. Это уравнение называют *каноническим уравнением параболы*. Изображение параболы в прямоугольной декартовой системе координат показано на рис. 1.7.

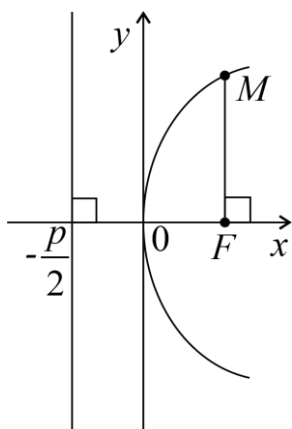
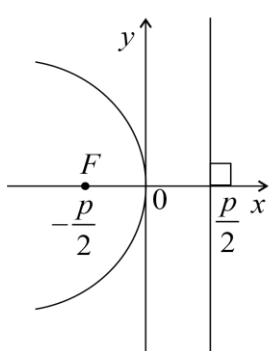


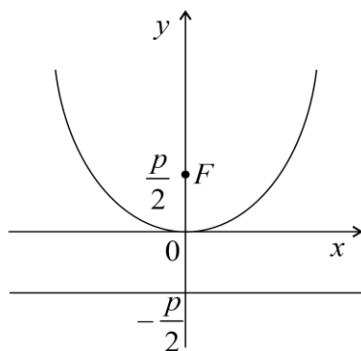
Рис. 1.7

Ось симметрии параболы (на рис. 1.7 совпадает с осью Ox) называется *осью параболы*. Точка пересечения параболы с ее осью называется *вершиной параболы*. Форму параболы характеризует ее параметр. Нетрудно заметить, что параметр p равен длине отрезка FM , перпендикулярного оси Ox . Поэтому, чем меньше параметр, тем больше ветви параболы «прижаты» к оси параболы.

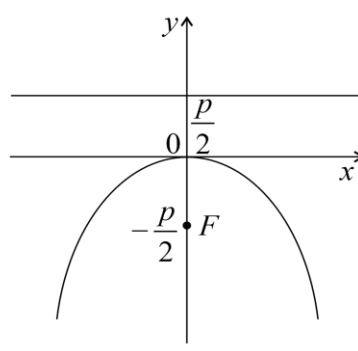
Наряду с параболой, определяемой уравнением $y^2 = 2px$, встречаются параболы с уравнениями $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$. Их изображения в прямоугольной декартовой системе координат показаны на рис. 1.8 (а, б, в), соответственно.



а)



б)



в)

Рис. 1.8

1.1.6 Преобразование системы координат на плоскости

Преобразованием системы координат называется переход от одной системы координат к другой.

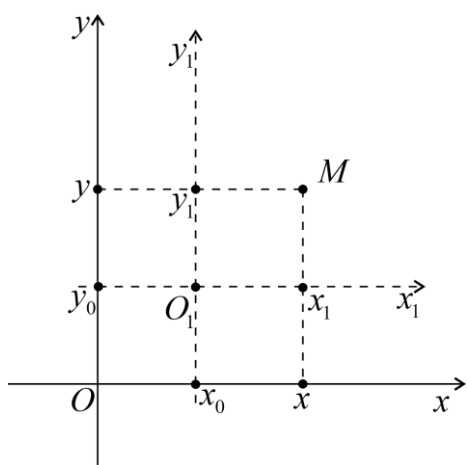


Рис. 1.9

Параллельный перенос осей координат – это преобразование прямоугольной декартовой системы координат, при котором меняется положение начала координат, а направление осей и масштабные единицы измерения длин остаются неизменными.

Пусть прямоугольная декартова система координат Oxy с помощью параллельного переноса осей координат переходит в систему координат $O_1x_1y_1$ (рис. 1.9). Если точка O_1

имеет координаты (x_0, y_0) в «старой» системе координат Oxy , то формулы, связывающие «старые» координаты (x, y) точки M и её «новые» координаты (x_1, y_1) , имеют вид

$$x = x_0 + x_1,$$

$$y = y_0 + y_1.$$

Поворот осей координат – это преобразование прямоугольной декартовой системы координат, при котором обе оси координат поворачиваются вокруг начала координат в одном направлении на один и тот же угол, а начало координат и масштабные единицы измерения длин остаются без изменений.

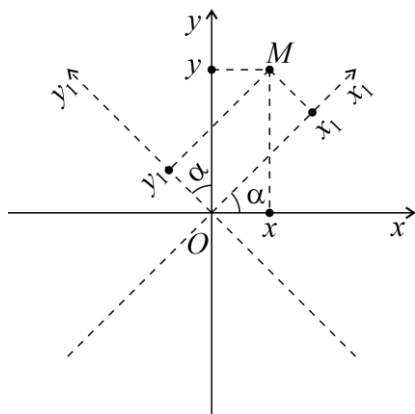


Рис. 1.10

Пусть прямоугольная декартова система координат Oxy с помощью поворота осей координат на угол α переходит в систему координат Ox_1y_1 (рис. 1.10). При этом связь между «старыми» координатами (x, y) и «новыми» (x_1, y_1) точки M выражается формулами:

$$x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha,$$

$$y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha.$$

1.1.7 Виды плоских фигур второго порядка

Общее уравнение второй степени относительно переменных x и y :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (1.1)$$

где $B \neq 0$, при повороте осей координат на угол α , определяемый из равенства

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{B},$$

в новой системе координат Ox_1y_1 преобразуется в уравнение

$$A_1x_1^2 + C_1y_1^2 + D_1x_1 + E_1y_1 + F_1 = 0,$$

которое не содержит произведения переменных x_1 и y_1 . Следующая теорема описывает все плоские фигуры второго порядка, определяемые этим уравнением.

Теорема 1.1. Уравнение второй степени

$$A_1x_1^2 + C_1y_1^2 + D_1x_1 + E_1y_1 + F_1 = 0,$$

где A_1 и C_1 одновременно не равны нулю, определяет на плоскости: либо окружность (при $A_1 = C_1$), либо эллипс (при $A_1C_1 > 0$), либо гиперболу (при $A_1C_1 < 0$), либо параболу (при $A_1 = 0$ или $C_1 = 0$). При этом возможны случаи вырождения: для эллипса и окружности – в точку или пустое множество (мнимый эллипс или окружность); для гиперболы – в пару пересекающихся прямых; для параболы – в две параллельные прямые, в одну прямую или пустое множество.

Таким образом, плоские фигуры второго порядка, определяемые уравнением (1.1) описаны в теореме 1.1. Построить их в прямоугольной системе координат можно с помощью преобразований системы координат.

1.2 Примеры решения задач

Пример 1. Составьте каноническое уравнение эллипса, большая полуось которого равна 3, а фокус находится в точке $F(\sqrt{5}, 0)$. Сделайте чертёж.

Решение. Так как фокус эллипса лежит на оси Ox , то каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a – большая полуось. По условию задачи $a = 3$. Поскольку фокус $F(\sqrt{5}, 0)$, то $c = \sqrt{5}$, и $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 5 = 4$, откуда $b = 2$. Таким образом, искомое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Построим этот эллипс в прямоугольной декартовой системе координат (рис. 1.11).

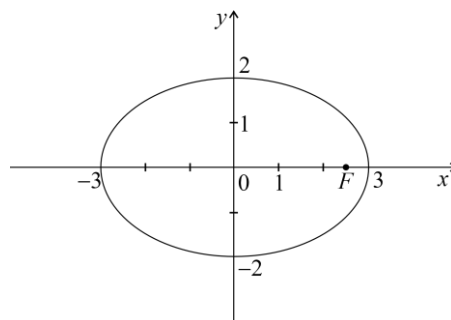


Рис. 1.11

Ответ: эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Пример 2. Составьте каноническое уравнение гиперболы, у которой асимптота имеет угловой коэффициент $k = \frac{3}{4}$, и точка $M\left(-5, \frac{9}{4}\right)$ лежит на гиперболе. Сделайте чертёж.

Решение. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Уравнения асимптот гиперболы $y = \pm \frac{b}{a}x$, поэтому $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$, откуда $3a = 4b$. По условию задачи координаты точки M удовлетворяют уравнению гиперболы, т. е. выполняется равенство:

$$\frac{(-5)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{9}{4}\right)^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{25}{a^2} - \frac{81}{16b^2} = 1.$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{25}{a^2} - \frac{81}{16b^2} = 1, \\ 3a = 4b. \end{cases}$$

Из второго уравнения: $16b^2 = 9a^2$. Подставляя в первое уравнение, получим

$$\frac{25}{a^2} - \frac{9}{a^2} = 1, \quad \frac{16}{a^2} = 1,$$

откуда $a^2 = 16$, $a = 4$. Следовательно, $b = 3$. Таким образом, искомое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Построим эту гиперболу в прямоугольной декартовой системе координат (рис. 1.12).

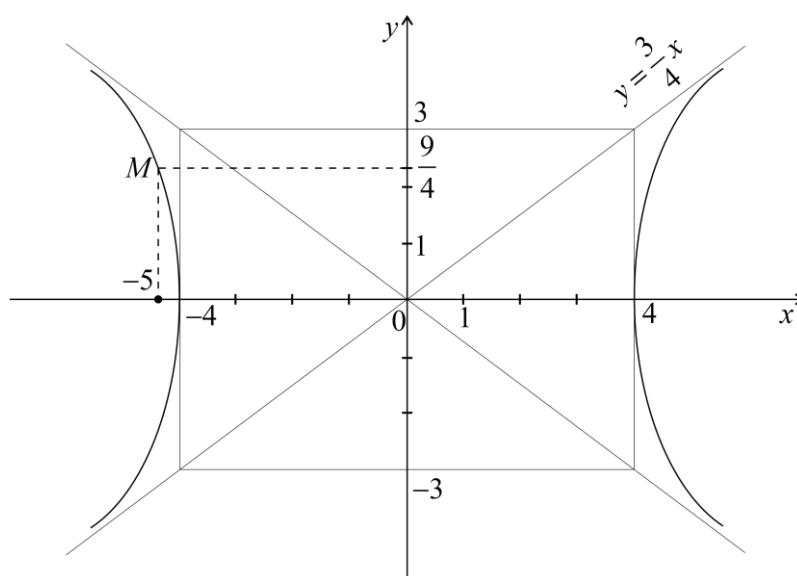


Рис. 1.12

Ответ: гипербола $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Пример 3. Составьте каноническое уравнение параболы, имеющей директрису с уравнением $y = -3$. Сделайте чертёж.

Решение. Так как директриса имеет уравнение $y = -3$, то каноническое уравнение параболы имеет вид $x^2 = 2py$, а уравнение директрисы $y = -\frac{p}{2}$, где p – параметр параболы. Тогда $-\frac{p}{2} = -3$, откуда $p = 6$. Следовательно, каноническое уравнение параболы $x^2 = 12y$. Построим эту параболу в прямоугольной декартовой системе координат (рис. 1.13).

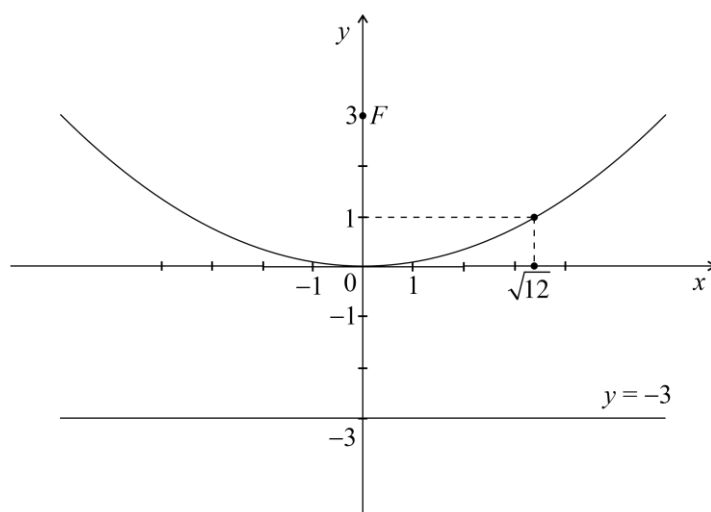


Рис. 1.13

Ответ: парабола $x^2 = 12y$.

Пример 4. Запишите уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса $x^2 + 4y^2 = 4$ и имеющей центр в его верхней вершине.

Решение. Каноническое уравнение данного эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

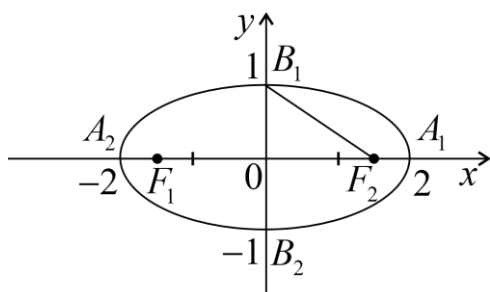


Рис. 1.14

Тогда большая полуось эллипса $a = 2$, малая полуось $b = 1$, откуда $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$ и $c = \sqrt{3}$. Следовательно, фокусы эллипса находятся в точках $F_1(-\sqrt{3}, 0)$ и $F_2(\sqrt{3}, 0)$, а верхняя вершина эллипса – точка $B(0, 1)$ (рис. 1.14).

Находим радиус окружности как расстояние между точками $B_1(0, 1)$ и $F_2(\sqrt{3}, 0)$:

$$R = B_1F_2 = \sqrt{(\sqrt{3} - 0)^2 + (0 - 1)^2} = 2.$$

Тогда уравнение окружности радиуса $R = 2$ с центром в точке $B_1(0, 1)$ имеет вид

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 2^2,$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

Ответ: $x^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Пример 5. Определите плоскую фигуру второго порядка, заданную уравнением

$$9x^2 + 16y^2 + 36x - 64y - 44 = 0.$$

Сделайте чертёж.

Решение. По теореме 1.1 данное уравнение может быть уравнением эллипса, либо определяет случаи вырождения эллипса в точку или пустое множество. Преобразуем левую часть уравнения, выделяя полные квадраты:

$$9(x^2 + 4x) + 16(y^2 - 4y) - 44 = 0,$$

$$9(x^2 + 4x + 4 - 4) + 16(y^2 - 4y + 4 - 4) - 44 = 0,$$

$$9((x + 2)^2 - 4) + 16((y - 2)^2 - 4) - 44 = 0,$$

$$9(x+2)^2 - 36 + 16(y-2)^2 - 64 - 44 = 0,$$

$$9(x+2)^2 + 16(y-2)^2 = 144,$$

$$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

Преобразуем прямоугольную декартову систему координат Oxy в систему координат $O_1x_1y_1$ с помощью параллельного переноса осей координат по формулам

$$\begin{cases} x_1 = x + 2, \\ y_1 = y - 2. \end{cases}$$

Тогда в системе координат Oxy точка $O_1(-2, 2)$, а в системе координат $O_1x_1y_1$ уравнение эллипса имеет канонический вид

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{9} = 1.$$

Построим этот эллипс (рис. 1.15).

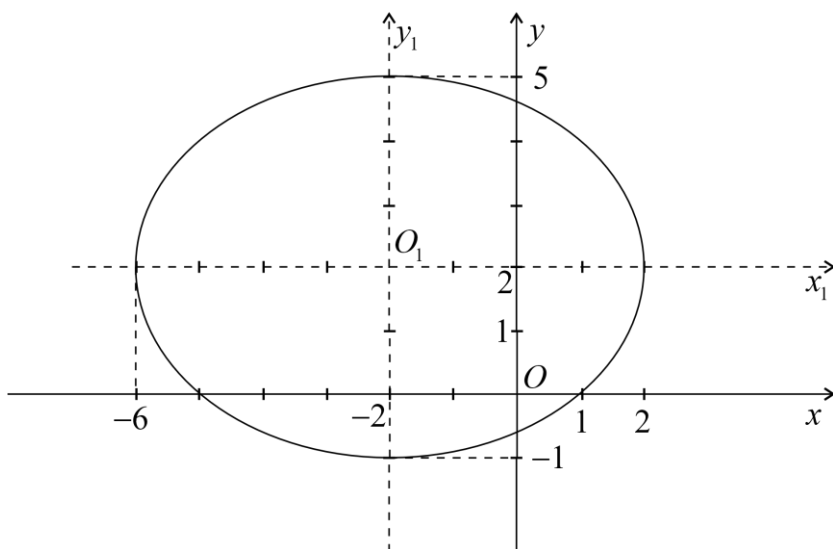


Рис. 1.15

Ответ: эллипс.

Пример 6. Определите плоскую фигуру второго порядка, заданную уравнением

$$4y^2 - 8y - 9x^2 - 36x - 32 = 0.$$

Сделайте чертёж.

Решение. По теореме 1.1 данное уравнение является уравнением гиперболы или уравнением двух пересекающихся прямых. Преобразуем уравнение

$$4(y^2 - 2y + 1 - 1) - 9(x^2 + 4x + 4 - 4) - 32 = 0,$$

$$4((y - 1)^2 - 1) - 9((x + 2)^2 - 4) - 32 = 0,$$

$$4(y - 1)^2 - 4 - 9(x + 2)^2 + 36 - 32 = 0,$$

$$4(y - 1)^2 - 9(x + 2)^2 = 0,$$

$$(2(y - 1))^2 - (3(x + 2))^2 = 0,$$

$$(2(y - 1) - 3(x + 2))(2(y - 1) + 3(x + 2)) = 0,$$

$$(2y - 3x - 8)(2y + 3x + 4) = 0.$$

Из этого равенства следует, что либо $2y - 3x - 8 = 0$, либо $2y + 3x + 4 = 0$. Оба уравнения являются уравнениями прямых. Построим эти прямые в прямоугольной системе координат (рис. 1.16)

$$l_1 : 2y - 3x - 8 = 0.$$

x	0	-2
y	4	1

$B(0, 4), A(-2, 1)$

$$l_2 : 2y + 3x + 4 = 0.$$

x	0	-2
y	-2	1

$C(0, -2), A(-2, 1)$

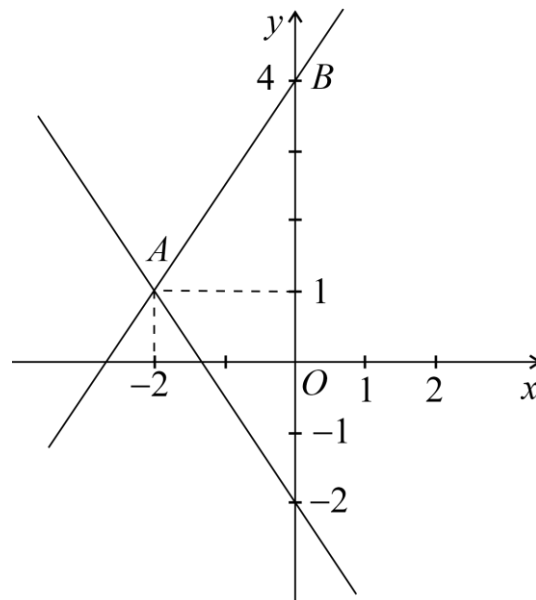


Рис. 1.16

Ответ: пересекающиеся прямые $l_1 : 2y - 3x - 8 = 0$ и $l_2 : 2y + 3x + 4 = 0$.

Пример 7. Определите плоскую фигуру второго порядка, заданную уравнением

$$x^2 + 4x - y + 1 = 0.$$

Сделайте чертёж.

Решение. По теореме 1.1 уравнение определяет либо параболу, либо параллельные или совпадающие прямые, либо пустое множество. Преобразуем левую часть уравнения:

$$(x^2 + 4x + 4 - 4) - y + 1 = 0,$$

$$(x + 2)^2 - 4 - y + 1 = 0,$$

$$(x + 2)^2 = y + 3$$

Перейдём от прямоугольной декартовой системы координат Oxy к системе координат $O_1x_1y_1$ с помощью параллельного переноса осей координат по формулам

$$\begin{cases} x_1 = x + 2, \\ y_1 = y + 3. \end{cases}$$

Тогда в системе координат Oxy начало координат $O_1(-2, -3)$, а в системе координат $O_1x_1y_1$ уравнение параболы имеет канонический вид $x_1^2 = y_1$. Построим эту параболу (рис. 1.17).

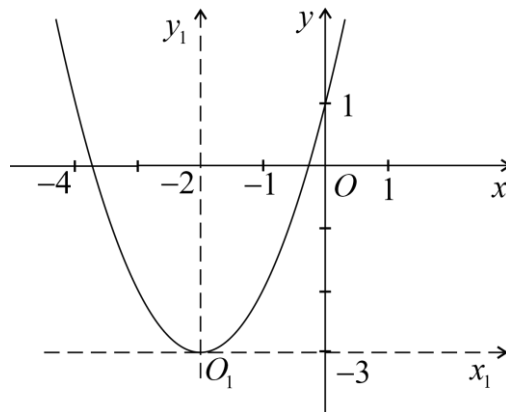


Рис. 1.17

Ответ: параболa.

Пример 8. Определите плоскую фигуру второго порядка, заданную уравнением

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0.$$

Сделайте чертёж.

Решение. По теореме 1.1 данное уравнение либо является уравнением окружности, либо описывает случай вырождения окружности в точку или пустое множество.

Преобразуем левую часть уравнения:

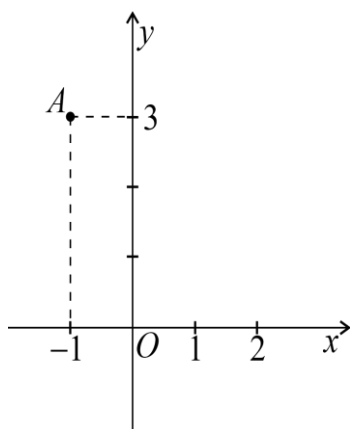


Рис. 1.18

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 6y) + 10 = 0,$$

$$(x^2 + 2x + 1 - 1) + (y^2 - 6y + 9 - 9) + 10 = 0,$$

$$(x + 1)^2 - 1 + (y - 3)^2 - 9 + 10 = 0,$$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 0.$$

Это уравнение имеет единственное решение $x = -1, y = 3$. Следовательно, данное уравнение определяет единственную точку $A(-1, 3)$ (рис. 1.18).

Ответ: точка $A(-1, 3)$.

Пример 9. Определите плоскую фигуру второго порядка, заданную уравнением

$$y^2 - 6y + 5 = 0.$$

Сделайте чертёж.

Решение. По теореме 1.1 уравнение определяет либо параболу, либо случаи её вырождения. Решая квадратное уравнение, получим $y_1 = 1, y_2 = 5$. Тогда данное уравнение можно записать в виде $(y - 1)(y - 5) = 0$, откуда следует, что либо $y = 1$, либо $y = 5$. Оба эти уравнения определяют горизонтальные прямые. Построим их в декартовой системе координат (рис. 1.19).

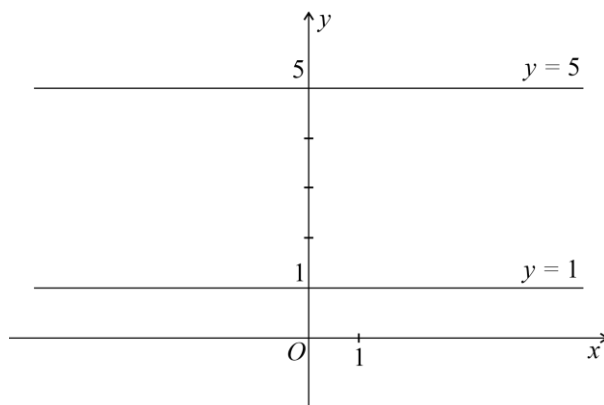


Рис. 1.19

Ответ: параллельные прямые $y = 1$ и $y = 5$.

Пример 10. Определите плоскую фигуру второго порядка, заданную уравнением

$$2x^2 + y^2 - 12x - 2y + 23 = 0.$$

Сделайте чертёж.

Решение. По теореме 1.1 уравнение может определять эллипс, либо точку, либо пустое множество (мнимый эллипс). Преобразуем левую часть уравнения

$$2(x^2 - 6x) + (y^2 - 2y) + 23 = 0,$$

$$2(x^2 - 6x + 9 - 9) + (y^2 - 2y + 1 - 1) + 23 = 0,$$

$$2((x - 3)^2 - 9) + (y - 1)^2 - 1 + 23 = 0,$$

$$2(x - 3)^2 - 18 + (y - 1)^2 + 22 = 0,$$

$$2(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = -4,$$

$$-\frac{(x - 3)^2}{2} - \frac{(y - 1)^2}{4} = 1.$$

Такое уравнение не имеет действительных решений. Это означает, что в декартовой системе координат нет точек, удовлетворяющих заданному уравнению.

Ответ: мнимый эллипс.

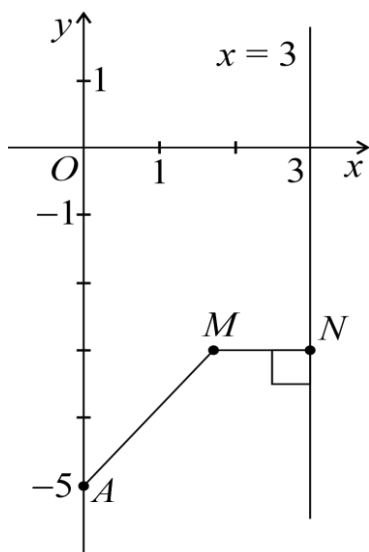


Рис. 1.20

Пример 11. Составьте уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от точки $A(0, -5)$ на расстоянии, вдвое большем, чем от прямой $x = 3$. Сделайте чертёж.

Решение. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка искомой линии. Если MN – перпендикуляр к прямой $x = 3$ (рис. 1.20), то $N(3, y)$. По условию задачи $AM = 2MN$. Тогда

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y + 5)^2} = 2\sqrt{(x - 3)^2 + (y - y)^2},$$

$$\sqrt{x^2 + (y + 5)^2} = 2\sqrt{(x - 3)^2}.$$

Возводим обе части в квадрат

$$x^2 + (y+5)^2 = 4(x-3)^2,$$

$$x^2 + y^2 + 10y + 25 = 4(x^2 - 6x + 9),$$

$$-3x^2 + y^2 + 10y + 24x - 11 = 0.$$

По теореме 1.1 это уравнение определяет либо гиперболу, либо две пересекающиеся прямые. Преобразуем левую часть уравнения

$$-3(x^2 - 8x) + (y^2 + 10y) - 11 = 0,$$

$$-3(x^2 - 8x + 16 - 16) + (y^2 + 10y + 25 - 25) - 11 = 0,$$

$$-3((x-4)^2 - 16) + (y+5)^2 - 25 - 11 = 0,$$

$$-3(x-4)^2 + 48 + (y+5)^2 - 36 = 0,$$

$$-3(x-4)^2 + (y+5)^2 = -12,$$

$$\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y+5)^2}{12} = 1.$$

Перейдём от системы координат Oxy к системе $O_1x_1y_1$ с помощью параллельного переноса осей координат по формулам

$$\begin{cases} x_1 = x - 4, \\ y_1 = y + 5. \end{cases}$$

Тогда в системе координат Oxy центр $O_1(4, -5)$, а уравнение гиперболы в системе координат $O_1x_1y_1$ имеет канонический вид

$$\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{12} = 1.$$

Построим эту гиперболу в системе координат (рис. 1.21).

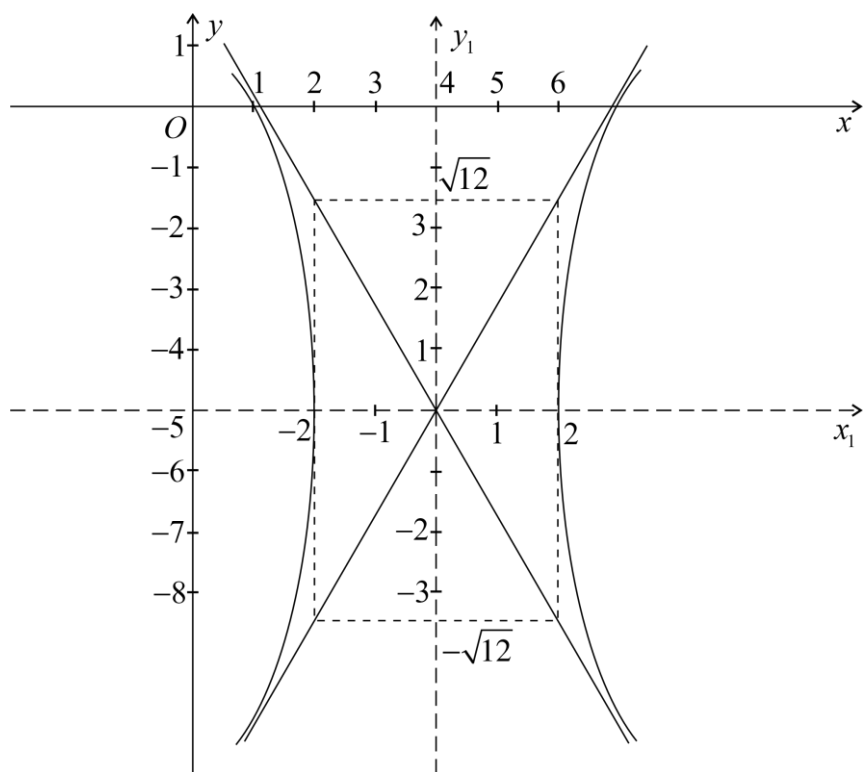


Рис. 1.21

Ответ: гипербола $\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y+5)^2}{12} = 1$.

1.3 Индивидуальные задания

1 Составьте каноническое уравнение эллипса и изобразите его в прямоугольной декартовой системе координат, если:

1.1) малая полуось эллипса равна 15, а фокус $F(-10,0)$;

1.2) точки $A(3,0)$ и $B\left(2, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ принадлежат эллипсу;

1.3) точка $A(-5,0)$ принадлежит эллипсу, а эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{\sqrt{21}}{5}$;

1.4) большая полуось эллипса равна 11, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{57}}{11}$;

1.5) большая полуось эллипса равна 4, а фокус $F(3,0)$;

1.6) эллипс проходит через точки $A(0, \sqrt{3})$ и $B\left(\sqrt{\frac{14}{3}}, 1\right)$;

1.7) эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{3}{5}$, и точка $A(10,0)$ принадлежит эллипсу;

1.8) большая полуось эллипса равна 6, а фокус $F(-4,0)$;

1.9) малая полуось эллипса равна 5, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

1.10) эллипс проходит через точки $A(0,-2)$ и $B\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, 1\right)$;

1.11) большая полуось эллипса равна 9, а фокус $F(7,0)$;

1.12) точка $A(-6,0)$ принадлежит эллипсу, а эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{2}{3}$;

1.13) фокус эллипса $F(13,0)$, а малая полуось эллипса равна $3\sqrt{3}$;

1.14) большая полуось эллипса равна 11, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{10}{11}$;

1.15) точки $A(-3,0)$ и $B\left(1, \frac{2\sqrt{10}}{3}\right)$ принадлежат эллипсу.

2 Составьте каноническое уравнение гиперболы и изобразите её в прямоугольной декартовой системе координат, если:

2.1) действительная полуось гиперболы равна 8, а угловой коэффициент асимптоты $k = -\frac{3}{4}$;

2.2) мнимая полуось гиперболы равна $2\sqrt{10}$, а фокус $F(-11,0)$;

2.3) точки $A(4\sqrt{5}, 3)$ и $B(4\sqrt{6}, 3\sqrt{6})$ принадлежат гиперболе;

2.4) действительная полуось гиперболы равна 13, а угловой коэффициент асимптоты $k = \frac{12}{13}$;

2.5) эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{14}{13}$, а мнимая полуось равна $3\sqrt{3}$;

2.6) действительная полуось гиперболы равна 11, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{11}$;

2.7) мнимая полуось гиперболы равна 6, а фокус $F(-10,0)$;

2.8) гипербола проходит через точки $A(\sqrt{8}, 0)$ и $B(\sqrt{10}, 2)$;

2.9) действительная полуось гиперболы равна 6, а угловой коэффициент асимптоты $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2.10) эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{4}{3}$ и действительная полуось равна 9;

2.11) гипербола проходит через точки $A(\sqrt{6}, 0)$ и $B(-2\sqrt{2}, 1)$;

2.12) мнимая полуось гиперболы равна 3, а фокусы $F(-7, 0)$;

2.13) действительная полуось гиперболы равна 3, а угловой коэффициент асимптоты $k = \frac{1}{3}$;

2.14) точки $A\left(\sqrt{\frac{32}{3}}, 1\right)$ и $B(\sqrt{8}, 0)$ принадлежат гиперболе;

2.15) мнимая полуось гиперболы равна $2\sqrt{6}$, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{7}{5}$.

3 Составьте каноническое уравнение параболы и изобразите её в прямоугольной декартовой системе координат, если:

3.1) директриса параболы $x = -4$;

3.2) ось симметрии параболы совпадает с осью Ox и точка $A(27, 9)$ принадлежит параболе;

3.3) директриса параболы $y = -2$;

3.4) точка $A(4, 1)$ принадлежит параболе, а ось симметрии параболы совпадает с осью Oy ;

3.5) директриса параболы $x = 1$;

3.6) директриса параболы $y = 3$;

3.7) ось симметрии параболы совпадает с осью Ox и точка $A(-7, -7)$ принадлежит параболе;

3.8) директриса параболы $x = -2$;

3.9) директриса параболы $y = -1$;

3.10) точка $A(4, -10)$ принадлежит параболе, а ось Oy является осью симметрии;

3.11) директриса параболы $x = 3$;

3.12) директриса параболы $y = 1$;

3.13) ось симметрии параболы совпадает с осью Ox , а точка $A(-5, 15)$ принадлежит параболе;

3.14) директриса параболы $x = -1$;

3.15) директриса параболы $y = -3$.

4 Запишите уравнение окружности с центром в точке A , проходящей через указанные точки.

4.1) $A(0, -2)$, вершины гиперболы $12x^2 - 13y^2 = 156$;

4.2) $A(0, 6)$, фокусы эллипса $9x^2 + 25y^2 = 1$;

4.3) $A(0, -3)$, левый фокус гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$;

4.4) $A(2, -7)$, правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$;

4.5) $A(0, 4)$, вершины гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$;

4.6) A – верхняя вершина эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$, фокусы этого эллипса;

4.7) $A(0, -4)$, фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 80$;

4.8) $A(-1, -3)$, левый фокус эллипса $3x^2 + 7y^2 = 21$;

4.9) $A(0, -6)$, левая вершина гиперболы $5x^2 - 9y^2 = 45$;

4.10) $A(1, 3)$, правая вершина гиперболы $3x^2 - 16y^2 = 48$;

4.11) $A(-1, -2)$, левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$;

4.12) A – нижняя вершина эллипса $x^2 + 10y^2 = 90$, фокусы этого эллипса;

4.13) $A(-5, -2)$, правая вершина гиперболы $3x^2 - 25y^2 = 75$;

4.14) $A(0, -6)$, фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$;

4.15) $A(0, 5)$, фокусы гиперболы $5x^2 - 11y^2 = 55$.

5 Определите плоскую фигуру второго порядка, заданную уравнением. Сделайте чертёж.

5.1 а) $4x^2 - 16x + 9y^2 - 18y - 11 = 0$,

б) $16x^2 - 32x - 9y^2 - 36y - 164 = 0$,

в) $x^2 - 5x + 4 = 0$.

5.2 а) $x^2 + 4x - y + 5 = 0$,

б) $4x^2 + 8x - 9y^2 + 18y - 41 = 0$,

в) $9x^2 + 18x + 4y^2 - 16y + 61 = 0$.

5.3 а) $4x^2 - 24x + 25y^2 + 100y + 36 = 0$,

б) $9x^2 + 18x + 4y^2 - 16y + 25 = 0$,

в) $x^2 - 4x - 4y^2 - 8y - 16 = 0$.

5.4 а) $y^2 - 3y + 2 = 0$,

б) $4x^2 + 24x + y^2 + 2y + 21 = 0$,

в) $x^2 - 4x - 4y^2 - 8y = 0$.

- 5.5 a) $y^2 - 4y - x + 8 = 0$,
 б) $4x^2 - 16x + 9y^2 - 18y + 61 = 0$,
 в) $9x^2 + 54x - 4y^2 + 16y + 29 = 0$.
- 5.6 a) $16x^2 - 32x - 9y^2 - 36y - 20 = 0$,
 б) $9x^2 + 36x + 16y^2 - 96y + 36 = 0$,
 в) $4x^2 - 4x + 1 = 0$.
- 5.7 a) $9x^2 + 18x + 4y^2 - 16y - 11 = 0$,
 б) $y^2 - x - 2y - 2 = 0$,
 в) $4x^2 + 8x - 9y^2 + 18y - 5 = 0$.
- 5.8 a) $x^2 - 2x - y - 1 = 0$,
 б) $4x^2 - 16x + 9y^2 - 18y + 25 = 0$,
 в) $9x^2 + 54x - 4y^2 + 16y + 65 = 0$.
- 5.9 a) $9x^2 + 18x - 25y^2 + 150y - 414 = 0$,
 б) $4x^2 + 24x + y^2 + 2y + 37 = 0$,
 в) $x^2 - 3x - 4 = 0$.
- 5.10 a) $x^2 - 6x - y + 8 = 0$,
 б) $4x^2 - 24x + 25y^2 + 100y + 236 = 0$,
 в) $9x^2 + 36x - 16y^2 + 32y + 4 = 0$.
- 5.11 a) $25x^2 + 100x + 4y^2 - 24y + 36 = 0$,
 б) $9x^2 + 18x - 25y^2 + 150y - 189 = 0$,
 в) $y^2 - 2x - 3 = 0$.
- 5.12 a) $9x^2 + 36x + 16y^2 - 96y + 324 = 0$,
 б) $4x^2 + 8x - y^2 + 4y - 16 = 0$,
 в) $2x^2 - 5x + 3 = 0$.
- 5.13 a) $y^2 + 4y - x + 1 = 0$,
 б) $4x^2 - 24x + 9y^2 + 36y + 36 = 0$,
 в) $4x^2 + 8x - y^2 + 4y = 0$.
- 5.14 a) $25x^2 - 50x - 9y^2 - 36y - 155 = 0$,
 б) $4x^2 + 24x + y^2 + 2y + 53 = 0$,
 в) $3y^2 - 5y + 2 = 0$.
- 5.15 a) $4x^2 - 8x + 9y^2 + 18y - 23 = 0$,
 б) $16x^2 - 24x - 9y^2 - 18y + 55 = 0$,
 в) $y^2 - 4y - x - 1 = 0$.

6 Составьте уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет заданным условиям. Сделайте чертёж.

6.1 Отстоит от прямой $x = -6$ на расстоянии в два раза больше, чем от точки $A(1, 3)$.

6.2 Отстоит от точки $A(1, 0)$ на расстоянии в пять раз меньше, чем от прямой $x = 8$.

6.3 Отстоит от точки $A(4, 1)$ на расстоянии в четыре раза больше, чем от точки $B(-2, -1)$.

6.4 Отстоит от прямой $y = 7$ на расстоянии в пять раз больше, чем от точки $A(4, -3)$.

6.5 Отстоит от точки $A(-3, 3)$ на расстоянии в три раза больше, чем от точки $B(5, 1)$.

6.6 Отстоит от точки $A(0, -5)$ на расстоянии в два раза меньше, чем от прямой $x = 3$.

6.7 Отстоит от точки $A(2, 1)$ на расстоянии в три раза больше, чем от прямой $x = -5$.

6.8 Отстоит от точки $A(4, -2)$ на расстоянии в два раза меньше, чем от точки $B(1, 6)$.

6.9 Отстоит от прямой $x = -5$ на расстоянии в три раза больше, чем от точки $A(6, 1)$.

6.10 Отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии в три раза меньше, чем от точки $A(1, 4)$.

6.11 Отстоит от точки $A(5, 7)$ на расстоянии в четыре раза больше, чем от точки $B(-2, 1)$.

6.12 Отстоит от прямой $x = 2$ на расстоянии в пять раз больше, чем от точки $A(4, -3)$.

6.13 Отстоит от точки $A(1, 5)$ на расстоянии в четыре раза меньше, чем от прямой $x = -1$.

6.14 Отстоит от прямой $x = -2$ на расстоянии в два раза больше, чем от точки $A(4, 0)$.

6.15 Отстоит от прямой $y = -2$ на расстоянии в три раза больше, чем от точки $A(5, 0)$.

2 ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1 Элементы теории

2.1.1 Простейшие задачи аналитической геометрии в пространстве

1 Нахождение расстояния между двумя точками

Если $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ – произвольные точки в пространстве, то расстояние AB между ними вычисляется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2 Деление отрезка в данном отношении

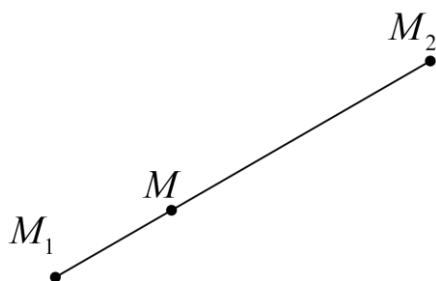


Рис. 2.1

Если M – произвольная точка отрезка M_1M_2 , отличная от точки M_2 (рис. 2.1), то число

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$$

называют *отношением*, в котором точка M делит отрезок M_1M_2 .

Теорема 2.1. Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – различные точки пространства. Если точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ , то:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Следствие. Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – различные точки пространства. Если точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – середина отрезка M_1M_2 , то

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

2.1.2 Виды уравнений плоскости

Уравнением плоскости в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ называется уравнение $F(x, y, z) = 0$ с тремя переменными x, y, z , которому удовлетворяют координаты любой точки данной плоскости и только они.

1 Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору

Нормальным вектором плоскости называется любой ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости.

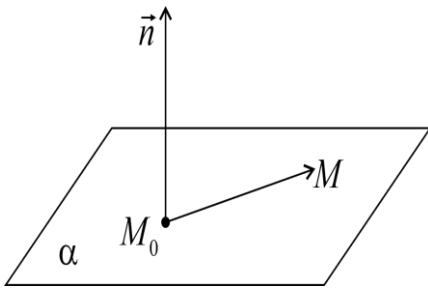


Рис. 2.2

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка плоскости α , и вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор этой плоскости. Если $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости α , то вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$ (рис. 2.2). Тогда скалярное произведение $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$, откуда получаем уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

которое называют *уравнением плоскости по точке и нормальному вектору*.

2 Общее уравнение плоскости

Если в уравнении плоскости по точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и нормальному вектору $\vec{n} = (A, B, C)$ раскрыть скобки и обозначить число $(-Ax_0 - By_0 - Cz_0)$ через D , то получим уравнение плоскости в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Это уравнение называют *общим уравнением плоскости*.

Алгебраическим уравнением первой степени относительно переменных x, y, z называют уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где коэффициенты A, B и C одновременно не равны нулю.

Теорема 2.2. *Уравнение любой плоскости в пространстве может быть записано в виде алгебраического уравнения первой степени относительно переменных x, y, z . Верно и обратное: любое алгебраическое уравнение первой степени относительно переменных x, y, z определяет некоторую плоскость в пространстве.*

3 Уравнение плоскости по трём точкам

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ – точки плоскости α , а $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости, то векторы

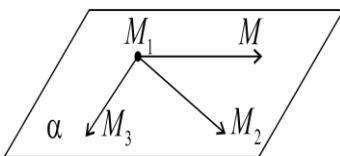


Рис. 2.3

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

компланарны (рис. 2.3). Тогда смешанное произведение этих векторов равно нулю. Получим уравнение плоскости α в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение называют *уравнением плоскости по трём точкам*.

4 Уравнение плоскости в отрезках на осях

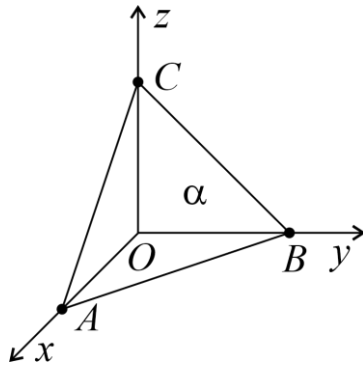


Рис. 2.4

Если плоскость α пересекает оси координат в точках $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ и $C(0, 0, c)$ (рис. 2.4), где числа a, b, c отличны от нуля, то уравнение плоскости α можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Это уравнение называют *уравнением плоскости в отрезках на осях*.

2.1.3 Расстояние от точки до плоскости

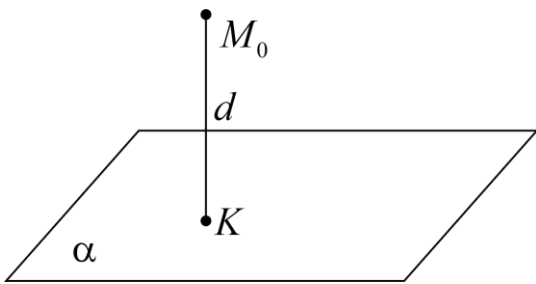


Рис. 2.5

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α , заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ (рис. 2.5), вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2.1.4 Взаимное расположение плоскостей

Пусть плоскости α и β заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

соответственно.

1 Плоскости пересекаются, если нормальные векторы $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ плоскостей α и β соответственно не коллинеарны. В этом случае нарушено условие

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Угол между плоскостями α и β определяется углом между нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ этих плоскостей. Поэтому, если φ – угол между плоскостями α и β , то

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

В частности, условие

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

является *условием перпендикулярности плоскостей α и β* .

2 Плоскости α и β параллельны или совпадают, если нормальные векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ этих плоскостей коллинеарны, т. е. выполняется условие

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Если при этом

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

то плоскости α и β имеют одно и то же уравнение и поэтому совпадают. Если же

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2},$$

то плоскости α и β параллельны.

2.1.5 Виды уравнений прямой в пространстве

1 Параметрические уравнения прямой

Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор, состоящий из направленных отрезков, параллельных данной прямой.

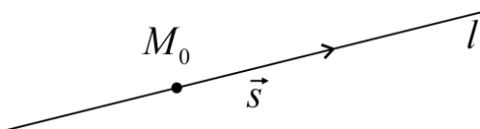


Рис. 2.6

Если $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка лежащая на прямой l , и $\vec{S} = (m, n, p)$ – направляющий вектор этой прямой (рис. 2.6), то *параметрическими уравнениями прямой l* называют уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Меняя в этих уравнениях *параметр* t , можем получить все точки $M(x, y, z)$ образующие прямую l .

2 Канонические уравнения прямой

Если в параметрических уравнениях прямой l исключить параметр t , то получим *канонические уравнения данной прямой*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

3 Уравнения прямой по двум точкам

Пусть прямая l проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 2.7). Тогда, используя

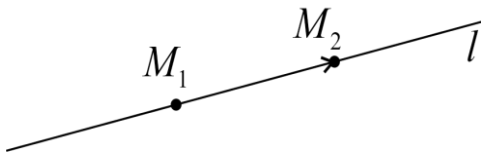


Рис. 2.7

вид канонических уравнений прямой, по точке M_1 и направляющему вектору $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ прямой l , получим уравнения

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

которые называют *уравнениями прямой по двум точкам*.

4 Уравнение прямой как линия пересечения двух различных плоскостей

Если α и β – различные непараллельные плоскости, заданные общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ соответственно, то α и β пересекаются по некоторой прямой l . Уравнение этой прямой можно записать системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Определяемая этой системой прямая l перпендикулярна нормальным векторам $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ плоскостей α и β (рис. 2.8). Поэтому, в качестве направляющего вектора прямой l можно взять вектор $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

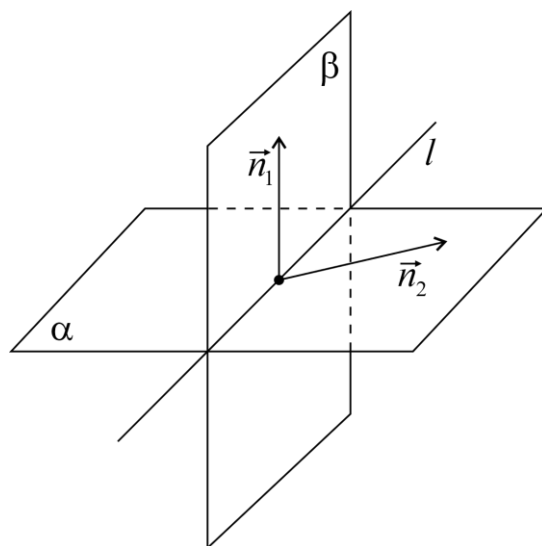


Рис. 2.8

2.1.6 Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_1 + m_1 t, \\ y = y_1 + n_1 t, \\ z = z_1 + p_1 t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x_2 + m_2 k, \\ y = y_2 + n_2 k, \\ z = z_2 + p_2 k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R},$$

соответственно.

1 Прямые l_1 и l_2 параллельны или совпадают, если направляющие векторы $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ этих прямых коллинеарны, т. е. выполняется условие

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (2.1)$$

Из уравнений данных прямых имеем точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, принадлежащие l_1 и l_2 соответственно. Если прямые l_1 и l_2 совпадают, то вектор $\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ коллинеарен вектору $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ (рис. 2.9), т. е. выполняется условие

$$\frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}. \quad (2.2)$$

Если же прямые l_1 и l_2 параллельны, то векторы $\overrightarrow{M_1 M_2}$ и $\vec{s}_1$ не коллинеарны (рис. 2.10), и условие (2.2) не выполняется.

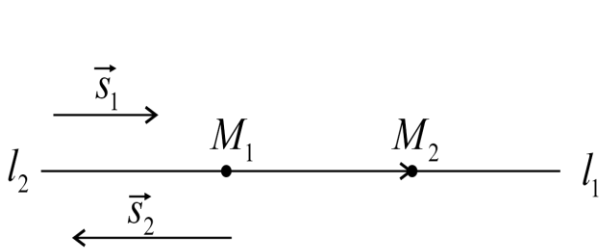


Рис. 2.9

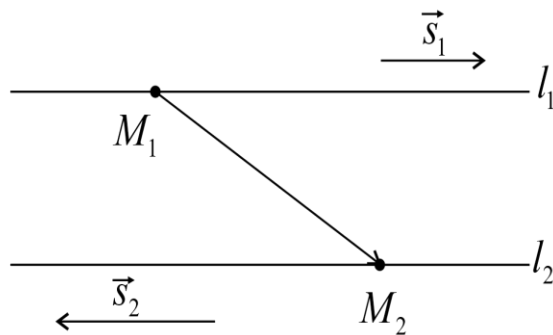


Рис. 2.10

Таким образом, при выполнении условий (2.1) и (2.2) прямые l_1 и l_2 совпадают, а если условие (2.1) выполняется, а (2.2) не выполняется, то прямые l_1 и l_2 параллельны.

2 Прямые l_1 и l_2 пересекаются или являются скрещивающимися, если их направляющие векторы $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ не коллинеарны, т. е. не выполняется условие (2.1).

Если при этом векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ компланарны, т. е. их смешанное произведение равно нулю:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.3)$$

то прямые l_1 и l_2 пересекаются (рис. 2.11).

Если же условие (2.3) не выполняется, то векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ не компланарны, а прямые l_1 и l_2 являются скрещивающимися (рис. 2.12).

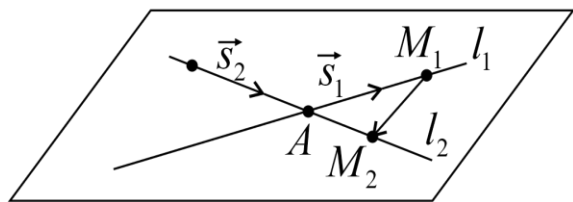


Рис. 2.11

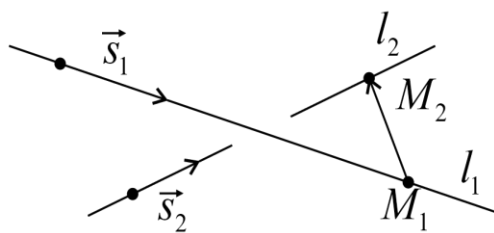


Рис. 2.12

Таким образом, если условие (2.1) не выполняется, а условие (2.3) выполняется, то прямые l_1 и l_2 пересекаются; если же условия (2.1) и (2.3) не выполняются, то прямые l_1 и l_2 являются скрещивающимися.

2.1.7 Угол между двумя прямыми в пространстве

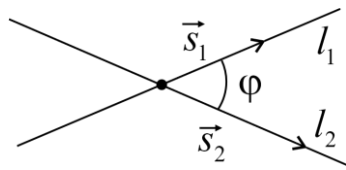


Рис. 2.13

Угол φ между прямыми l_1 и l_2 (рис. 2.13) с направляющими векторами $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ определяется как угол между направляющими векторами, т. е.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Из формулы получаем условие перпендикулярности прямых l_1 и l_2 : $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

2.1.8 Расстояние от точки до прямой в пространстве

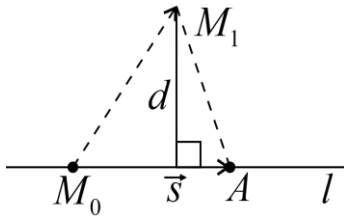


Рис. 2.14

Если прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{s} = (m, n, p)$ (рис. 2.14), то расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой l вычисляется по формуле

$$d = \frac{2S_{M_0 M_1 A}}{M_0 A} = \frac{|\vec{M_0 M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}.$$

2.1.9 Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть прямая l задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

а плоскость α имеет уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$. Подставляя выражения x, y, z из уравнений прямой в уравнение плоскости, получим линейное уравнение с переменной t

$$(Am + Bn + Cp)t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D). \quad (2.4)$$

1 Если $Am + Bn + Cp \neq 0$, то уравнение (2.4) имеет единственное решение. Это означает, что прямая l и плоскость α пересекаются. Чтобы найти координаты их точки пересечения, надо найти значение t из уравнения (2.4) и подставить его в параметрические уравнения прямой l .

2 Если $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0, \end{cases}$ то уравнение (2.4) не имеет реше-

ний, а это означает, что прямая l параллельна плоскости α .

3 Если $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \end{cases}$ то решениями уравнения (2.4) бу-

дут все $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что прямая l принадлежит плоскости α .

2.1.10 Угол между прямой и плоскостью

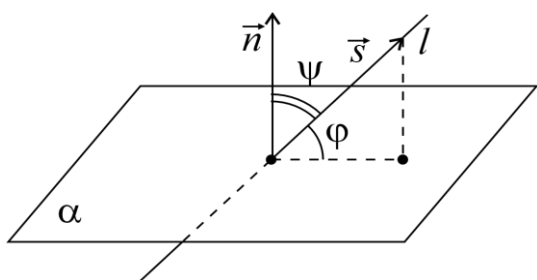


Рис. 2.15

Если прямая l имеет направляющий вектор $\vec{s} = (m, n, p)$, а плоскость α имеет нормальный вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ (рис. 2.15), то угол ϕ между прямой l и плоскостью α вычисляется по формуле

$$\sin \phi = |\cos \psi| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

2.2 Примеры решения задач

Пример 1. Запишите уравнение плоскости α , если:

1.1 α параллельна плоскости Oxz и точка $M_0(7, -3, 5)$ принадлежит плоскости α .

1.2 α проходит через координатную ось Oz и точку $A(-3, 1, -2)$.

1.3 Ось Ox параллельна α , а точки $M_1(4, 0, -2)$ и $M_2(5, 1, 7)$ принадлежат плоскости α .

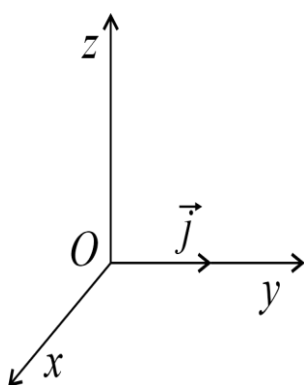


Рис. 2.16

Решение. 1.1 Нормальным вектором плоскости Oxz является вектор $\vec{j} = (0, 1, 0)$ (рис. 2.16). Так как искомая плоскость α параллельна плоскости Oxz , то вектор $\vec{j}$ является также нормальным вектором плоскости α . По точке $M_0(7, -3, 5)$ и нормальному вектору $\vec{j} = (0, 1, 0)$ можем записать уравнение плоскости α

$$0 \cdot (x - 7) + 1 \cdot (y + 3) + 0 \cdot (z - 5) = 0,$$

откуда искомое уравнение имеет вид

$$y + 3 = 0 \quad \text{или} \quad y = -3.$$

1.2 Так как искомая плоскость α проходит через координатную ось Oz , то точки $O(0,0,0)$ и $M(0,0,1)$, лежащие на оси Oz , принадлежат плоскости α . Запишем уравнение плоскости α по точкам O, M , и A

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_M - x_0 & y_M - y_0 & z_M - z_0 \\ x_A - x_0 & y_A - y_0 & z_A - z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad -3y - x = 0 \quad \text{или} \quad x + 3y = 0.$$

1.3 Так как координатная ось Ox параллельна искомой плоскости α , то вектор $\vec{i} = (1, 0, 0)$ лежит в плоскости α . Поскольку точки M_1 и M_2

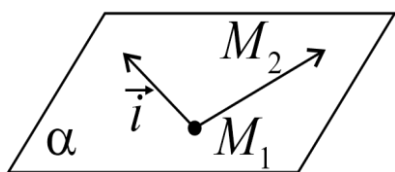


Рис. 2.17

принадлежат плоскости α , то вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (5 - 4, 1 - 0, 7 + 2) = (1, 1, 9)$ также лежит в плоскости α (рис. 2.17). Тогда в качестве нормального вектора плоскости α можно взять вектор $\vec{n} = \vec{i} \times \overrightarrow{M_1M_2}$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \vec{k} - 9\vec{j} = (0, -9, 1).$$

Теперь по точке $M_1(4, 0, -2)$ и нормальному вектору $\vec{n} = (0, -9, 1)$ можем записать уравнение плоскости α

$$0 \cdot (x - 4) - 9 \cdot (y - 0) + (z + 2) = 0,$$

откуда $-9y + z + 2 = 0$ и есть искомое уравнение плоскости α .

Ответ: 1.1) $y + 3 = 0$. 1.2) $x + 3y = 0$. 1.3) $-9y + z + 2 = 0$.

Пример 2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $P(1, 0, 2)$ и перпендикулярной плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $3x + 6y + 3z - 5 = 0$.

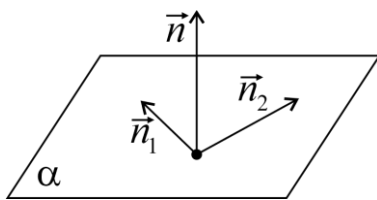


Рис. 2.18

Решение. Так как искомая плоскость α перпендикулярна плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $3x + 6y + 3z - 5 = 0$, то нормальные векторы $\vec{n}_1 = (2, -1, 3)$ и $\vec{n}_2 = (3, 6, 3)$ этих плоскостей принадлежат плоскости α . Тогда вектор $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ (рис. 2.18) является нормальным вектором плоскости α .

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -21\vec{i} + 3\vec{j} + 15\vec{k} = (-21, 3, 15).$$

Теперь по точке $P(1, 0, 2)$ и нормальному вектору $\vec{n} = (-21, 3, 15)$ можем записать уравнение плоскости α

$$-21(x - 1) + 3(y - 0) + 15(z - 2) = 0,$$

$$-21x + 3y + 15z - 9 = 0,$$

$$7x - y - 5z + 3 = 0.$$

Ответ: $7x - y - 5z + 3 = 0$.

Пример 3. Вычислите угол между плоскостями $x - 2y + 2z - 3 = 0$ и $3x - 4y + 5 = 0$.

Решение. Угол φ между заданными плоскостями определяется как угол между их нормальными векторами $\vec{n}_1 = (1, -2, 2)$ и $\vec{n}_2 = (3, -4, 0)$ этих плоскостей. Поэтому

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1 \cdot 3 + (-2)(-4) + 2 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} = \frac{11}{15}.$$

$$\text{Следовательно, } \varphi = \arccos\left(\frac{11}{15}\right).$$

$$\text{Ответ: } \arccos\left(\frac{11}{15}\right).$$

Пример 4. Вычислите расстояние между параллельными плоскостями α и β , заданными уравнениями $3x + 6y + 2z - 15 = 0$ и $-6x - 12y - 4z + 13 = 0$ соответственно.

Решение. Нетрудно заметить, что расстояние между параллельными плоскостями α и β можно вычислить как расстояние от произвольной

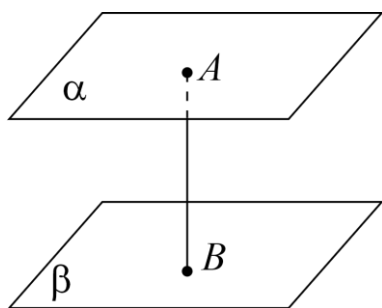


Рис. 2.19

точки A , принадлежащей плоскости α , до плоскости β (рис. 2.19).

Выберем некоторую точку A в плоскости α . Координаты точки A должны удовлетворять уравнению плоскости α . Пусть $y_A = 0$, $z_A = 0$. Тогда

$$3x_A + 6y_A + 2z_A - 15 = 0,$$

$$3x_A = 15 \quad \text{и} \quad x_A = 5,$$

т. е. $A(5, 0, 0)$ принадлежит α . Найдем расстояние от точки A до плоскости β

$$d = \frac{|-6 \cdot 5 - 12 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 13|}{\sqrt{(-6)^2 + (-12)^2 + (-4)^2}} = \frac{17}{14}.$$

Ответ: $\frac{17}{14}$.

Пример 5. Запишите уравнение плоскости, параллельной плоскости $x + 2y - 2z + 7 = 0$ и удалённой от точки $M(4, 3, 2)$ на расстояние, равное 7.

Решение. Так как искомая плоскость α параллельна плоскости $x + 2y - 2z + 7 = 0$, то нормальный вектор $\vec{n} = (1, 2, -2)$ этой плоскости также является нормальным вектором искомой плоскости α . Тогда $x + 2y - 2z + D = 0$ есть общее уравнение плоскости α . Поскольку искомая плоскость удалена от точки $M(4, 3, 2)$ на расстояние, равное 7, то

$$\frac{|4 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 7,$$

откуда $|6 + D| = 21$. Тогда либо $6 + D = 21$ и $D = 15$, либо $6 + D = -21$ и $D = -27$.

Ответ: $x + 2y - 2z + 15 = 0$ и $x + 2y - 2z - 27 = 0$.

Пример 6. Запишите канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2, 0, 3)$ и параллельной прямой, заданной системой уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 11 = 0, \\ 5x + 4y - z + 8 = 0. \end{cases}$$

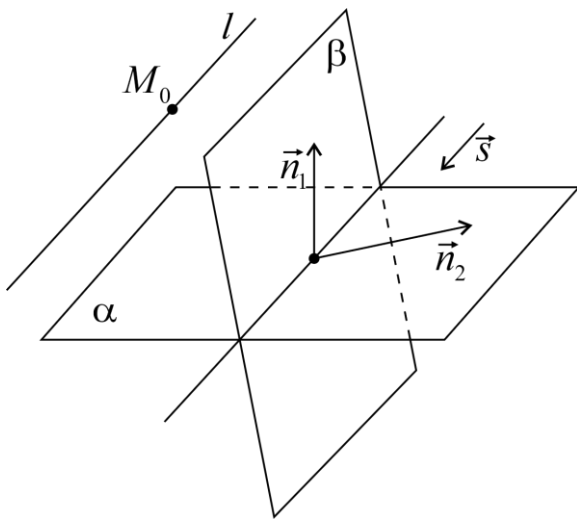


Рис. 2.20

Решение. Так как искомая прямая l параллельна линии пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 11 = 0$, и $5x + 4y - z + 8 = 0$ (рис. 2.20), то в качестве направляющего вектора прямой l можно взять вектор $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, где $\vec{n}_1 = (2, -1, 3)$ и $\vec{n}_2 = (5, 4, -1)$ – нормальные векторы данных плоскостей. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= -11\vec{i} + 17\vec{j} + 13\vec{k} = (-11, 17, 13). \end{aligned}$$

Поскольку искомая прямая l проходит через точку $M_0(2, 0, 3)$, то канонические уравнения прямой l имеют вид $\frac{x-2}{-11} = \frac{y}{17} = \frac{z-3}{13}$.

Ответ: $\frac{x-2}{-11} = \frac{y}{17} = \frac{z-3}{13}$.

Пример 7. Установите взаимное расположение прямой и плоскости. В случае их пересечения найдите координаты точки пересечения.

7.1 $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ и $3x - 3y + 2z - 5 = 0$.

7.2 $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ и $x + 2y - 4z + 1 = 0$.

7.3 $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ и $3x - y + 2z - 5 = 0$.

Решение 7.1 Запишем канонические уравнения прямой в виде параметрических уравнений $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3} = t$, $t \in \mathbb{R}$, откуда получим

$$\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 3 + 4t, \\ z = 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Подставляя найденные выражения для x, y, z в уравнение плоскости, получим

$$3(-1+2t) - 3(3+4t) + 2 \cdot 3t - 5 = 0, \quad 0 \cdot t = 17.$$

Так как полученное уравнение решений не имеет, то прямая и плоскость не имеют общих точек, а значит, они параллельны.

7.2 От канонических уравнений прямой перейдём к параметрическим уравнениям $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3} = t, \quad t \in \mathbb{R}$, откуда

$$\begin{cases} x = 13 + 8t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 4 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Подставляя выражения для x, y , и z в уравнение плоскости, получим

$$(13+8t) + 2(1+2t) - 4(4+3t) + 1 = 0, \quad 0 \cdot t = 0.$$

Так как полученное уравнение имеет бесконечно много решений ($t \in \mathbb{R}$), то прямая и плоскость имеют бесконечно много общих точек, а значит, прямая принадлежит плоскости.

7.3 Запишем параметрические уравнения данной прямой

$$\begin{cases} x = 7 + 5t, \\ y = 4 + t, \\ z = 5 + 4t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Подставляя выражения для x, y , и z в уравнение плоскости, получим

$$3(7+5t) - (4+t) + 2(5+4t) - 5 = 0, \quad 22t = -22,$$

откуда $t = -1$. Поскольку уравнение имеет единственное решение, то прямая и плоскость имеют только одну общую точку, т. е. они пересекаются. Подставляя $t = -1$ в параметрические уравнения прямой, получим координаты их точки пересечения $M(2, 3, 1)$.

Ответ: 7.1) параллельны. 7.2) прямая принадлежит плоскости. 7.3) пересекаются в точке $M(2, 3, 1)$.

Пример 8. Найдите параметрические уравнения прямой, заданной системой уравнений

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z - 1 = 0, \\ 5x - 2y + 3z - 3 = 0. \end{cases}$$

Решение. В качестве направляющего вектора заданной прямой l можно взять вектор $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, где $\vec{n}_1 = (4, -3, 2)$ и $\vec{n}_2 = (5, -2, 3)$ – нормальные векторы плоскостей, из уравнений которых составлена система. Находим

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k} = (-5, -2, 7).$$

Пусть A – точка, принадлежащая заданной прямой. Тогда координаты точки A являются решением заданной системы уравнений. Решим эту систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & | & 1 \\ 5 & -2 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+II \cdot (-1)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & | & -2 \\ 5 & -2 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+I \cdot 5} \\ \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & | & -2 \\ 0 & -7 & -2 & | & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} -x - y - z = -2, \\ -7y - 2z = -7. \end{cases}$$

Полученная ступенчатая система имеет бесконечно много решений. Пусть x и y – главные неизвестные, z – свободная неизвестная.

Выразим главные неизвестные через свободную: $x = 1 - \frac{5}{7}z$, $y = 1 - \frac{2}{7}z$, $z \in \mathbb{R}$. Найденные формулы дают координаты всех точек заданной прямой. Выберем одну из точек. Пусть $z = 7$, тогда $x = -4$, $y = -1$. Итак, $A(-4, -1, 7)$ – точка, лежащая на заданной прямой. Теперь можем записать параметрические уравнения прямой l

$$\begin{cases} x = -4 - 5t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = 7 + 7t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -4 - 5t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = 7 + 7t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Пример 9. Запишите уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$$

и перпендикулярную плоскости $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

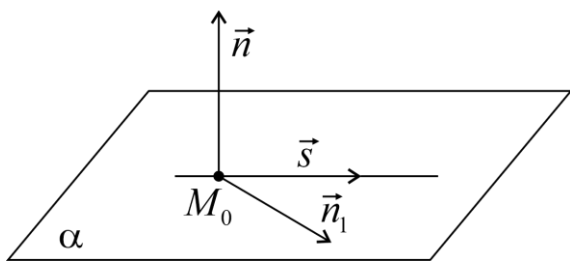


Рис. 2.21

Решение. Так как искомая плоскость α перпендикулярна плоскости $x + 4y - 3z + 7 = 0$, то нормальный вектор $\vec{n}_1 = (1, 4, -3)$ данной плоскости лежит в плоскости α . Поскольку заданная прямая принадлежит плоскости α , то точка $M_0(2, 3, -1)$

и направляющий вектор $\vec{s} = (5, 1, 2)$ этой прямой также лежат в плоскости α (рис. 2.21). Тогда вектор $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{s}$ является нормальным вектором плоскости α .

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 17\vec{j} - 19\vec{k} = (11, -17, -19).$$

Теперь по точке $M_0(2, 3, -1)$ и нормальному вектору $\vec{n} = (11, -17, -19)$ запишем уравнение плоскости α .

$$11(x - 2) - 17(y - 3) - 19(z + 1) = 0,$$

$$11x - 17y - 19z + 10 = 0.$$

Ответ: $11x - 17y - 19z + 10 = 0$.

Пример 10. Выясните взаимное расположение прямых l_1 и l_2 , заданных уравнениями

$$\frac{x+7}{8} = \frac{y-4}{5} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{7} = \frac{z-2}{4}$$

соответственно.

Решение. Векторы $\vec{s}_1 = (8, 5, 2)$ и $\vec{s}_2 = (1, 7, 4)$ являются направляющими векторами прямых l_1 и l_2 . Эти векторы не являются коллинеарными, так как их координаты не пропорциональны:

$$\frac{8}{1} \neq \frac{5}{7} \neq \frac{2}{4}.$$

Следовательно, прямые l_1 и l_2 либо пересекаются, либо являются скрещивающимися. Точки $M_1(-7, 4, 0)$ и $M_2(1, 3, 2)$ принадлежат прямым l_1 и l_2 соответственно. Найдём смешанное произведение векторов $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2} = (8, -1, 2)$

$$\vec{s_1} \vec{s_2} \overrightarrow{M_1 M_2} = \begin{vmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 8 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 112 - 2 + 160 - 112 + 32 - 10 = 180.$$

Поскольку смешанное произведение не равно нулю, то векторы $\vec{s_1}$, $\vec{s_2}$ и $\overrightarrow{M_1 M_2}$ не компланарны, а значит, прямые l_1 и l_2 являются скрещивающимися.

Ответ: скрещивающиеся.

2.3 Индивидуальные задания

1 Даны точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$.

1) Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку A_1 и параллельной плоскости $A_2 A_3 A_4$.

2) Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки A_1 и A_2 и перпендикулярной плоскости, содержащей точку A_3 и ось Oz .

3) Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки A_3 и A_4 и параллельной оси Oy .

1.1 $A_1(3, 0, 1)$, $A_2(4, -5, 3)$, $A_3(0, 4, 1)$, $A_4(7, -3, -1)$.

1.2 $A_1(0, 2, 8)$, $A_2(3, -2, 1)$, $A_3(5, 0, 1)$, $A_4(1, -3, 5)$.

1.3 $A_1(9, 2, 1)$, $A_2(0, -5, 8)$, $A_3(1, 0, -1)$, $A_4(2, 1, 5)$.

1.4 $A_1(3, -2, 10)$, $A_2(-3, 1, 0)$, $A_3(1, 3, -4)$, $A_4(2, 0, 3)$.

1.5 $A_1(-3, 11, 1)$, $A_2(3, 0, 2)$, $A_3(-4, 1, -1)$, $A_4(0, -2, 3)$.

1.6 $A_1(0, -2, 1)$, $A_2(12, -2, 2)$, $A_3(-1, 0, 1)$, $A_4(-9, 7, 3)$.

1.7 $A_1(-3, 2, 3)$, $A_2(0, 1, -5)$, $A_3(4, -2, -1)$, $A_4(2, -3, 1)$.

1.8 $A_1(-3, 2, 4)$, $A_2(3, 5, 2)$, $A_3(7, 3, -5)$, $A_4(-3, 1, 0)$.

1.9 $A_1(-1, 2, 6)$, $A_2(3, -5, 2)$, $A_3(-4, 0, 1)$, $A_4(0, 3, -4)$.

1.10 $A_1(3, 2, 1)$, $A_2(3, -5, 0)$, $A_3(4, 0, -1)$, $A_4(0, -3, 2)$.

1.11 $A_1(0, -5, 2)$, $A_2(1, -1, -1)$, $A_3(4, 4, -1)$, $A_4(1, -3, 2)$.

1.12 $A_1(-3, 2, 2)$, $A_2(3, 2, -5)$, $A_3(4, 0, -1)$, $A_4(-2, 1, 3)$.

1.13 $A_1(1, 2, 3)$, $A_2(3, -3, 0)$, $A_3(4, 6, -7)$, $A_4(1, 7, -1)$.

1.14 $A_1(-3, 4, 5)$, $A_2(-4, 3, 0)$, $A_3(4, 2, -1)$, $A_4(1, 1, -3)$.

1.15 $A_1(0, -2, 1)$, $A_2(2, -4, 3)$, $A_3(-4, 0, 1)$, $A_4(-1, 5, 4)$.

2 Плоскости α и β заданы общими уравнениями.

1) Найдите угол между плоскостями α и β .

2) Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2, 1, 4)$ и перпендикулярной плоскостям α и β .

2.1 $\alpha: x - 3y + 2z - 4 = 0$; $\beta: -2x + 4y - z + 10 = 0$.

$$2.2 \quad \alpha: 3x + y - 5z - 2 = 0; \quad \beta: -x + 2y + 4z - 5 = 0.$$

$$2.3 \quad \alpha: 2x - 3y + z - 6 = 0; \quad \beta: -4x + y - 3z + 7 = 0.$$

$$2.4 \quad \alpha: 4x - 3z + 9 = 0; \quad \beta: -3x + 2y - z + 1 = 0.$$

$$2.5 \quad \alpha: -5x + y + z - 3 = 0; \quad \beta: x - 3y - 3z + 4 = 0.$$

$$2.6 \quad \alpha: -x + 3y - 2z + 2 = 0; \quad \beta: 4x - 3y + 6 = 0.$$

$$2.7 \quad \alpha: -2x + y - 5z + 1 = 0; \quad \beta: -x + 4y + z - 5 = 0.$$

$$2.8 \quad \alpha: 3x + y + 2z - 3 = 0; \quad \beta: -2x - 4y + 3z - 4 = 0.$$

$$2.9 \quad \alpha: -4x - y + z - 7 = 0; \quad \beta: 3y + z - 6 = 0.$$

$$2.10 \quad \alpha: x - 3y + 4z - 8 = 0; \quad \beta: -3x + y - 5z + 2 = 0.$$

$$2.11 \quad \alpha: 2x - 3y + 7z - 1 = 0; \quad \beta: -4x - 2y + 11 = 0.$$

$$2.12 \quad \alpha: -3x + y + 2z - 9 = 0; \quad \beta: x + y - 4z - 3 = 0.$$

$$2.13 \quad \alpha: -4x + y + 5z - 1 = 0; \quad \beta: -x - 2y + 3z - 6 = 0.$$

$$2.14 \quad \alpha: 3x - 2y + z - 7 = 0; \quad \beta: -2x - y + 3z + 2 = 0.$$

$$2.15 \quad \alpha: x - 4y + 5z - 8 = 0; \quad \beta: 5x - y + 4z + 3 = 0.$$

3 Составьте уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка A_1A_2 и перпендикулярной отрезку A_1A_2 , где A_1 и A_2 – точки из задания 1.

4 Запишите уравнение плоскости, параллельной плоскости α и удалённой от точки $M(1, 5, -7)$ на расстояние, равное 5, если α – плоскость из задания 2.

5 Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку A_2 и параллельной прямой, заданной как линия пересечения плоскостей α и β , где A_2 – точка из задания 1, а α и β – плоскости из задания 2.

6 Установите взаимное расположение заданной прямой и плоскости α из задания 2. В случае их пересечения найдите координаты их точки пересечения.

$$6.1 \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+9}{4}.$$

$$6.2 \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-1}{2}.$$

$$6.3 \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-4}.$$

$$6.4 \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

$$6.5 \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z+2}{7}.$$

$$6.6 \quad \frac{x+4}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{-3}.$$

$$6.7 \quad \frac{x+3}{2} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-2}{-2}.$$

$$6.8 \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z+2}{-1}.$$

$$6.9 \quad \frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-5}{-1}.$$

$$6.10 \quad \frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{3}.$$

$$6.11 \quad \frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+1}{2}.$$

$$6.12 \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{1}.$$

$$6.13 \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

$$6.14 \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+6}{-4}.$$

$$6.15 \quad \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2}.$$

7 Вычислите угол между прямой, заданной как линия пересечения плоскостей α_1 и β_1 , и плоскостью $A_1A_2A_3$, где A_1 , A_2 , A_3 — точки из задания 1.

$$7.1 \quad \alpha_1: -2x + y - 5z + 1 = 0; \quad \beta_1: -4x + y - 3z + 7 = 0.$$

$$7.2 \quad \alpha_1: 3x + y + 2z - 3 = 0; \quad \beta_1: -3x + 2y - z + 1 = 0.$$

$$7.3 \quad \alpha_1: -4x - y + z - 7 = 0; \quad \beta_1: x - 3y - 3z + 4 = 0.$$

$$7.4 \quad \alpha_1: x - 3y + 4z - 8 = 0; \quad \beta_1: 4x - 3y + 6 = 0.$$

$$7.5 \quad \alpha_1: 2x - 3y + 7z - 1 = 0; \quad \beta_1: -x + 4y + z - 5 = 0.$$

$$7.6 \quad \alpha_1: -3x + y + 2z - 9 = 0; \quad \beta_1: -2x - 4y + 3z - 4 = 0.$$

$$7.7 \quad \alpha_1: -4x + y + 5z - 1 = 0; \quad \beta_1: 3y + z - 6 = 0.$$

$$7.8 \quad \alpha_1: 3x - 2y + z - 7 = 0; \quad \beta_1: -3x + y - 5z + 2 = 0.$$

$$7.9 \quad \alpha_1: x - 4y + 5z - 8 = 0; \quad \beta_1: -4x - 2y + 11 = 0.$$

$$7.10 \quad \alpha_1: x - 3y + 2z - 4 = 0; \quad \beta_1: x + y - 4z - 3 = 0.$$

$$7.11 \quad \alpha_1: 3x + y - 5z - 2 = 0; \quad \beta_1: -x - 2y + 3z - 6 = 0.$$

$$7.12 \quad \alpha_1: 2x - 3y + z - 6 = 0; \quad \beta_1: -2x - y + 3z + 2 = 0.$$

$$7.13 \quad \alpha_1: 4x - 3z + 9 = 0; \quad \beta_1: 5x - y + 4z + 3 = 0.$$

$$7.14 \quad \alpha_1: -5x + y + z - 3 = 0; \quad \beta_1: -2x + 4y - z + 10 = 0.$$

$$7.15 \quad \alpha_1: -x + 3y - 2z + 2 = 0; \quad \beta_1: -x + 2y + 4z - 5 = 0.$$

8 Установите взаимное расположение прямой из задания 6 и прямой, заданной параметрическими уравнениями.

$$8.1 \begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = -2 + t, \\ z = 5 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$8.2 \begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 8 - 14t, \\ z = 3 - 4t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$8.3 \begin{cases} x = t, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 5 - 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$8.4 \begin{cases} x = -3 + 4t, \\ y = 4t, \\ z = 6t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$8.5 \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 10 + 4t, \\ z = 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$8.6 \begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 3 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$8.7 \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 3t, \\ z = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$8.8 \begin{cases} x = 4 - 4t, \\ y = 1 + 8t, \\ z = 3 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$8.9 \begin{cases} x = 5 + 4t, \\ y = -5 - 14t, \\ z = 6 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$8.10 \begin{cases} x = 3 - t, \\ y = 3t, \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$8.11 \quad \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$8.12 \quad \begin{cases} x = 3 + 4t, \\ y = 3 + 8t, \\ z = 4 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$8.13 \quad \begin{cases} x = -1 - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 5 + 4t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$8.14 \quad \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -t, \\ z = 3 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$8.15 \quad \begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = -5 - 6t, \\ z = -1 - 4t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Производственно-практическое издание

**Бузланов Александр Васильевич,
Близнец Игорь Васильевич,
Бородич Руслан Викторович,
Бородич Елена Николаевна**

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ:
ПЛОСКИЕ ФИГУРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА,
ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ**

Практическое пособие

Редактор Е. С. Балашова
Корректор В. В. Калугина

Подписано в печать 20.05.2025. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 3,05.
Тираж 10 экз. Заказ 313.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий в качестве:
издателя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013 г.;
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017 г.
Ул. Советская, 104, 246028, Гомель.

