Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 2

УДК 519.217 *МАТЕМАТИКА*

С. М. ЕРМАКОВ

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ ИТЕРАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 24 XI 1971)

В заметке описывается обобщение схемы Неймана — Улама ([1]) на случай нелинейных интегральных уравнений. Это обобщение оказывается естественным образом связанным с ветвящимися варковскими процессами. Хотя известно, что ветвящиеся процессы связаны с нелинейными уравнениями (например, ([2])), обратная задача сопоставления данному нелинейному уравнению ветвящегося случайного процесса и эффективного его моделирования ранее не рассматривалась. Между тем, имеется широкий круг прикладных задач, где возникает необходимость использования метода Монте-Карло для решения нелинейных интегральных уравнений. Рядом авторов (например, ([3], [4])) на основе физических соображений были построены статистические модели, связанные с нелинейными уравнениями и позволяющие использовать метод Монте-Карло. Модели эти, однако, связаны с линеаризацией исходного уравнения, что требует запоминания таблицы значений неизвестной функции при вычислениях и очень усложняет анализ погрешности ([5]).

Приводимые ниже статистические оценки на траекториях ветвящегося процесса позволяют построить алгоритм, в значительной мере свободный от перечисленных недостатков.

Будем рассматривать нелинейные интегральные уравнения вида

$$\varphi(x)=\int\limits_{\mathscr{D}}\sum_{i=1}^{N}K_i(x,y)\,\varphi^i(y)\,dy+f(x), \tag{1}$$

где $K_i(x,y)$, $i=1,\ldots,N$, и $f(x)$ — заданные функции, $\varphi(x)$ — искомая функция, $x\in\mathscr{D}$, $(xy)\in\mathscr{D}\times\mathscr{D}$, где $\mathscr{D}$ — область s-мерного эвклидова пространства и интегрирование по $\mathscr{D}$ понимается в смысле Лебега.

Предполагается: 1°) При $n\to\infty$ последовательность функций, определяемых равенствами

$$\varphi_0(x)=f(x),\qquad \varphi_n(x)=f(x)+\int\limits_{\mathscr{D}}\sum_{i=1}^{N}K_i(x,y)\,\varphi_{n-1}^i(y)\,dy, \tag{2}$$

сходится к функции $\bar{\varphi}$ для почти всех x из множества $\{x{:}h(x)\neq 0,\ x\in\mathscr{D}\}$, где $\bar{\varphi}$ является решением уравнения (1), а $h(x)$ — некоторая, заданная в $\mathscr{D}$ функция;

2°) для $h(x)$ существует и конечен интеграл $\int\limits_{\mathscr{D}}\bar{\varphi}(x)\,h(x)\,dx$;

3°) предположения 1°) и 2°) выполняются для уравнения (1), если K_i, $i=1,\ldots,N$, и f заменить на $|K_i|$ и $|f|$ соответственно.

Отметим, что полученные ниже результаты тривиальным образом переносятся на случай, когда интегрирование всюду производится по некоторой σ-конечной мере (и, в частности, дискретной мере, что соответствует задаче решения системы нелинейных алгебраических уравнений), и перейдем к описанию случайного процесса.

Мультииндекс $(1, j_1, \ldots, j_k)$, где k — фиксированное натуральное число и j_l, $1 \leqslant l \leqslant k$, натуральные числа, обозначим $\nu[k]$. Считаем, что $\nu[0] = 1$, $\nu[1] = (1, j_1)$ и $\nu[k] = (\nu[k-1], jk)$. l-м поколением назовем множество $\mathfrak{B}_l$ мультииндексов $\nu[l]$ таких, что соответствующие им $\nu[l-1]$ принадлежат $\mathfrak{B}_{l-1}$, причем $\mathfrak{B}_0$ состоит из единственного элемента — единицы. Совокупность $\gamma_k = (\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{k-1})$ такую, что $\mathfrak{B}_{k-1}$ не пусто, назовем деревом с k поколениями. Поколения $\mathfrak{A}_l$, включающие всевозможные мультииндексы, для которых $1 \leqslant j_l \leqslant i_l(\nu[l-1])$, $1 \leqslant l \leqslant k$, где $i_l(\nu[l-1])$, заданные целочисленные функции мультииндекса $\nu[l-1]$, назовем полным поколением, а совокупность $\Gamma_k = (\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{k-1})$, полным деревом. Соотношение $\gamma_k \in \Gamma_k$ означает, что $\mathfrak{B}_l \in \mathfrak{A}_l$, $l = 0, 1, \ldots$ $\ldots, k-1$.

Используем введенные множества мультииндексов для нумерации независимых переменных, полагая $x[0] = x_1$, $x[1] = x_1^{i_1}$, $\quad x[k] = x_{1, j_1, \ldots, j_{k-1}}^{i_1, \ldots, i_k}$ и опишем случайный процесс в терминах размножающихся частиц. Считаем, что если частица появилась в точке $x[l]$, $1 \leqslant l \leqslant k$, то она рождает в этой точке i_l частиц, нумеруемых индексом j_l, $j_l = 1, \ldots, i_l$, каждая из которых ведет себя аналогично исходной, т. е. с вероятностью $q_0(x[l])$ погибает и с вероятностью $q_{i_{l+1}}(x[l])$, $1 - q_0(x[l])$ переходит в точку $x[l+1]$, распределенную в $\mathscr{D}$ с плотностью

$$p_{i_{l+1}}(x[l], x[l+1]) = \frac{r_{i_{l+1}}(x[l], x[l+1])}{q_{i_{l+1}}(x[l])(1 - q_0(x[l]))},$$

причем

$$r_i(x, y) \geqslant 0, \quad x \in \mathscr{D}, y \in \mathscr{D}; \quad \int_{\mathscr{D}} r_i(x, y)\, dy = q_i(x)(1 - q_0(x)),$$

$$i = 1, \ldots, N, \text{ т. е. } q_0(x) + \int_{\mathscr{D}} \sum_{i=1}^{N} r_i(x, y)\, dy = 1.$$

Относительно точки x_1 предполагается, что она распределена в $\mathscr{D}$ с плотностью $p_0(x_1)$, $\int_{\mathscr{D}} p_0(x)dx = 1$. Реализации этого случайного процесса очевидным образом связаны с деревьями, которые были определены выше. С деревьями, как будет следовать из дальнейшего, связан и метод последовательных приближений (2).

Сопоставим дереву γ_k следующее выражение, связанное с (1):

$$\begin{aligned} A(\gamma_k) &= \int_{\mathscr{D}} dx[0]\, h(x[0]) \int_{\mathscr{D}} dx[1]\, K_{i_1}(x[0], x[1])(f(x[1])^{\rho_1} \times \\ &\times \prod_{\nu[1] \in \mathfrak{B}_1} \int_{\mathscr{D}} dx[2]\, K_{i_2}(x[1], x[2])(f(x[2]))^{\rho_2} \times \ldots \\ &\ldots \times \prod_{\nu[k-1] \in \mathfrak{B}_{k-1}} \int_{\mathscr{D}} dx[k]\, K_{i_k}(x[k-1], x[k])\, f(x[k]))^{i_k(\nu[k-1])}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$A(\gamma_0) = \int_{\mathscr{D}} h(x[0])\, f(x[0])\, dx[0],$$

где $\rho_l = i_l(\nu[l-1]) - r_\nu(\nu[l-1])$, $0 < l \leqslant k$, а r_ν есть число мультииндексов $\nu[l]$, у которых совпадают $\nu[l-1]$ при $\nu[l] \in \mathfrak{B}_l$.

Справедлива следующая

Лемма. *Имеет место равенство*

$$\int_{\mathscr{D}} \varphi_n(x)\, h(x)\, dx = \sum_{\Gamma_n} \sum_{\substack{\gamma_l \in \Gamma_l \\ 0 \leqslant l \leqslant n}} A(\gamma_l), \tag{4}$$

где суммирование в правой части производится по всевозможным полным деревьям, для которых $1 \leqslant i_k \leqslant N$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и всем деревьям, для которых $\gamma_l \in \Gamma_l$, $0 \leqslant l \leqslant n$.

Из описания случайного процесса следует, что его реализации, связанной с деревом γ_k, соответствует плотность вероятности

$$p_0(x[0])\, r_{i_1}(x[0], x[1])\, q_0^{\rho_1}(x[1]) \prod_{\nu[1]\in\mathfrak{B}_1} r_{i_2}(x[1], x[2]) \times \ldots \times q_0^{\rho_{k-1}}(x[k-1]) \times$$
$$\times \prod_{\nu[k-1]\in\mathfrak{B}_{k-1}} r_{i_k}(x[k-1], x[k])\, q_0^{i_k}(x[k]),$$

и дереву γ_0 — $p_0(x[0])\, q_0(x[0])$.

Из леммы следует, что процесс, у которого $r_i(x, y)$ таковы, что

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = 1, \quad \sigma_n(x) = \int_{\mathscr{D}} \sum_{i=1}^{N} r_i(x, y)\, \sigma_{n-1}^i(y)\, dy + q_0(x),$$
$$\sigma_0(x) = q_0(x),$$

для почти всех x, имеет почти все реализации с конечным числом поколений. Ограничимся рассмотрением таких процессов. Предположим также, что $r_i(x, y) > 0$, если $K_i(x, y) \neq 0$; $q_0(x) > 0$ и $p_0(x) > 0$, если $h(x) \neq 0$. При этих предположениях справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Случайная величина*

$$\zeta = \frac{h(x[0])}{p_0(x[0])} \frac{K_{i_1}(x[0], x[1])}{r_{i_1}(x[0], x[1])} \left(\frac{f(x[1])}{q_0(x[1])}\right)^{\rho_1} \times$$
$$\times \prod_{\nu[1]\in\mathfrak{B}_1} \frac{K_{i_2}(x[1], x[2])}{r_{i_2}(x[1], x[2])} \times \ldots \times \left(\frac{f(x[k-1])}{q_0(x[k-1])}\right)^{\rho_{k-1}} \times$$
$$\times \prod_{\nu[k-1]\in\mathfrak{B}_{k-1}} \frac{K_{i_k}(x[k-1], x[k])}{r_{i_k}(x[k-1], x[k])} \left(\frac{f(x[k])}{q_0(x[k])}\right)^{i_k}, \tag{5}$$

определенная на траекториях случайного процесса (связанная с деревом γ_k), является несмещенной оценкой функционала $\int_{\mathscr{D}} \varphi(x)\, h(x)\, dx$.

Теорема 2. *Если для почти всех x из множества $\{x\colon h(x) \neq 0, x \in \mathscr{D}\}$ существует и конечен предел $\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)$, где*

$$\psi_n(x) = \int_{\mathscr{D}} \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i^2(x, y)}{r_i(x, y)} \psi_{n-1}^i(y)\, dy + \frac{f^2(x)}{q_0(x)}, \quad \psi_0(x) = \frac{f^2(x)}{q_0(x)}$$

и $h(x)$ такова, что существует и конечен интеграл $\int_{\mathscr{D}} \frac{h^2(x)}{p_0(x)} \psi(x)\, dx$, то дисперсия $D\zeta$ конечна и

$$D\zeta = \int_{\mathscr{D}} \frac{h^2(x)}{p_0(x)} \psi(x)\, dx - \left(\int_{\mathscr{D}} \bar{\varphi}(x)\, h(x)\right)^2. \tag{6}$$

Теорема 3. *Если все K_i, f и h положительны в $\mathscr{D}$, то при*

$$r_i(x, y) = \frac{K_i(x, y)\, \bar{\varphi}^i(y)}{\bar{\varphi}(x)}, \quad p_0(x) = \frac{\bar{\varphi}(x)\, h(x)}{F}$$

дисперсия случайной величины ζ равна нулю.

Последнее утверждение позволяет, как и в линейном случае (например, ([6])), использовать априорные сведения о функции φ для уменьшения дисперсии оценки. Отметим, что сравнительно просто можно построить несмещенные оценки, отличные от оценки (5), однако вычислительная процедура, связанная с ними, оказывается существенно более сложной.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
12 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. E. Forsithe, R. Z. Leibler, Math. Tables and other Aids to Comp., 4, 127 (1950). [2] Т. Харрис, Теория ветвящихся случайных процессов, М., 1966. [3] Дж. К. Хэвиленд, Вычислительные методы в динамике разреженных газов, Сборн., М., 1969, стр. 7. [4] G. A. Bird, Rarefied Gas Dynamics, Proc. VI Intern. Symp., 1, N. Y.— London, 1969, p. 85. [5] B. L. Hicks, M. A. Smith, J. Comp. Phys., 3, 58 (1968). [6] Д. И. Голенко, Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах, «Наука», 1965. [7] С. М. Ермаков, Метод Монте-Карло и смежные вопросы, «Наука», 1971.