Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 6

УДК 519.281

МАТЕМАТИКА

Л. Б. КЛЕБАНОВ

«УНИВЕРСАЛЬНЫЕ» ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ И НЕСМЕЩЕННЫЕ ОЦЕНКИ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 18 X 1971)

1. Пусть $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, P_\theta)$, $\theta \in \Theta$, — вероятностное пространство с семейством вероятностных распределений на нем. Предположим, что по результатам наблюдения $x \in \mathfrak{X}$, подчиняющегося одному из законов P_θ, надо оценить значение заданной функции $\gamma(\theta): \Theta \to R^1$.

Будем рассматривать класс K всех несмещенных оценок с конечной дисперсией параметрической функции $\gamma(\theta)$, т. е. таких оценок $f(x)$, что

$$E_\theta f(x) = \gamma(\theta), \quad E_\theta f^2(x) < +\infty, \quad \theta \in \Theta.$$

Если γ^* — оптимальная в классе K оценка параметрической функции $\gamma(\theta)$ при мере качества, порожденной квадратической функцией потерь, то (при некоторых ограничениях) γ^* будет также оптимальной в указанном классе и для любой функции потерь $w(\gamma^*, \gamma)$ — выпуклой по γ^* при каждом фиксированном γ (см. ([1, 2])).

В предлагаемой заметке мы рассмотрим вопрос, какие функции потерь обладают аналогичным свойством.

Определение. Функцию потерь $w(\gamma^*, \gamma)$ будем называть универсальной для семейства распределений P_θ, если любая ограниченная оценка, являющаяся оптимальной в классе K при мере качества, порожденной функцией потерь $w(\gamma^*, \gamma)$, будет оптимальной в указанном классе и при мере качества, порожденной любой функцией потерь $w_1(\gamma^*, \gamma)$, выпуклой по γ^* при каждом фиксированном γ.

2. Обозначим через V класс всех несмещенных оценок нуля с конечной дисперсией (н.о.н), т. е. таких оценок χ, для которых

$$E_\theta \chi = 0, \quad E_\theta \chi^2 < +\infty, \quad \theta \in \Theta, \tag{1}$$

а через V_0 — класс ограниченных оценок, удовлетворяющих (1).

Лемма 1. *Пусть V_0 плотно по метрике $L_2(P_\theta)$, $\theta \in \Theta$, в множестве V, а $w(\gamma^*, \gamma)$ — дважды непрерывно дифференцируемая, выпуклая по γ^* при каждом фиксированном γ функция.*

Для того чтобы ограниченная оценка $\gamma^*(x)$ была оптимальна в классе K при мере качества, порожденной функцией потерь $w(\gamma^*, \gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$E_\theta \left\{ \frac{\partial w}{\partial \gamma^*} (\gamma^*(x), \gamma(\theta)) \chi \right\} = 0$$

для всех $\theta \in \Theta$ и $\chi \in V_0$.

Теорема 1. *Пусть V_0 плотно по метрике $L_2(P_\theta)$, $\theta \in \Theta$, в множестве V, а $w(\gamma^*, \gamma)$ — выпуклая по γ^* при каждом фиксированном γ функция. представимая в виде*

$$w(\gamma^*, \gamma) = \varphi_1(\gamma)\psi(\gamma^*) + \varphi_2(\gamma)\gamma^* + \varphi_3(\gamma), \tag{2}$$

где ψ — дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что

$$\varphi_1(\gamma)\psi''(\gamma^*) > 0 \tag{3}$$

при всех γ, γ^*.

Тогда $w(\gamma^*, \gamma)$ — функция потерь, универсальная для семейства P_θ.

Доказательство основано на соображениях, сходных с примененными в ([2]).

Отметим, что среди функций потерь $w(\gamma^*, \gamma) = w(\gamma^* - \gamma)$, $w(u) \geqslant 0$, $w(0) = 0$, представление вида (2) допускают только

$$w_1(\gamma^* - \gamma) = A(\gamma^* - \gamma)^2,$$
$$w_2(\gamma^* - \gamma) = B[e^{C(\gamma^* - \gamma)} - C(\gamma^* - \gamma) - 1]$$

для некоторых A, B, C, причем w_1 может быть получена предельным переходом из w_2, когда $C \to 0$, $B \to \infty$ таким образом, что $B \sim 2A / C^2$.

3. Пусть теперь выборочное пространство $\mathfrak{X}$ состоит из m точек $x_1, \ldots, x_m$ и

$$P_\theta\{X = x_i\} = p_i(\theta),\ i = 1, \ldots, m-1, \quad P_\theta\{X = x_m\} = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} p_i(\theta).$$

Допустим, что $p_1(\theta), \ldots, p_n(\theta)$ — максимальная линейно независимая подсистема среди функций $p_1(\theta), \ldots, p_{m-1}(\theta)$ (этого можно добиться изменением нумерации).

Теорема 2. *Пусть функции $1, p_1(\theta), \ldots, p_n(\theta)$ линейно независимы и, кроме того, линейно независимы все функции вида $p_1^{k_1}(\theta), \ldots, p_n^{k}(\theta)$ для всех целых $k_i \geqslant 0$, $0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i \leqslant 2k - 1$, где $k > 0$ — целое число.*

Тогда функция потерь

$$w(\gamma^*, \gamma) = (\gamma^* - \gamma)^{2k}$$

является универсальной для семейства P_θ.

4. Выше мы рассматривали класс несмещенных оценок $f(x)$ параметрической функции $\gamma(\theta)$, т. е. таких, что

$$E_\theta f(x) = \gamma(\theta).$$

Однако с каждой выпуклой функцией потерь $w(\gamma^*, \gamma)$ можно связать свое понятие несмещенности, которое мы будем называть w-несмещенностью (см. ([3]), стр. 25).

Лемма 2. *Пусть функция потерь $w(\gamma^*, \gamma)$ выпукла по γ^* при каждом фиксированном γ и представима в виде*

$$w(\gamma^*, \gamma) = \varphi_1(\gamma^*)\psi_1(\gamma) + \psi_2(\gamma) + \varphi_2(\gamma^*), \tag{4}$$

где φ_1 — непрерывная, строго монотонная функция, а ψ_1, ψ_2 непрерывно дифференцируемы.

Пусть статистика T достаточна для семейства P_θ, $\theta \in \Theta$, а f — w-несмещенная оценка параметрической функции $\gamma_1(\theta)$.

Тогда существует w-несмещенная оценка $\gamma^*(x)$ параметрической функции $\gamma_1(\theta)$, зависящая от достаточной статистики T и такая, что

$$E_\theta w(\gamma^*(x), \gamma_1(\theta)) \leqslant E_\theta w(f(x), \gamma_1(\theta)).$$

Теорема 3. *Пусть $w(\gamma^*, \gamma)$ — функция потерь, для которой справедливы одновременно представления вида (2) и (4), $\gamma^*(x)$ — w-несмещенная ограниченная оценка параметрической функции $\gamma_1(\theta)$. Допустим, что $\gamma^*(x)$ — оптимальная оценка в классе K (при $\gamma(\theta) = E_\theta\gamma^*$) при мере качества, порожденной функцией потерь $w(\gamma^*, \gamma)$, а множество V_0 плотно по метрике $L_2(P_\theta)$ в множестве V.*

Тогда γ^* оптимальна в классе w-несмещенных оценок с конечной дисперсией параметрической функции $\gamma_1(\theta)$.

5. Пусть $\mathfrak{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $P_\theta\{X = x_1\} = P_\theta\{X = x_2\} = 1/2 \sin^2\theta$, $P_\theta\{X = x_3\} = \cos^2\theta$, $\theta \in [0, \alpha]$ при достаточно малом $\alpha > 0$. Для указан-

ного семейства лапласовский ущерб

$$w(\gamma^*, \gamma) = |\gamma^* - \gamma|$$

не является универсальной функцией потерь.

Автор пользуется случаем выразить свою глубокую благодарность акад. Ю. В. Linнику за постановку задачи и внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
3 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. R. Padmanabhan, Sankhya, ser. A, **32**, 1, 107 (1970). [2] Ю. В. Линник, А. Л. Рухин, ДАН, **198**, № 3 (1971). [3] Э. Леман, Проверка статистических гипотез, М., 1964.