

Н. Н. КУЗНЕЦОВ

АСИМПТОТИКА НЕКОММУТАТИВНОЙ РАЗНОСТНОЙ АПРОКСИМАЦИИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 29 X 1971)

В работах ^(1, 2) показано, что конечно-разностные схемы, аппроксимирующие дифференциальные уравнения, по признаку коммутативности разрешающего оператора дифференциальной задачи и оператора погрешности разностной аппроксимации, естественным образом разделяются на коммутативные и некоммутирующие. В то время как асимптотика решений коммутативных разностных аппроксимаций (устойчивых в слабом смысле ^(1, 2, 4)) единообразным образом описывается (см. ⁽³⁾) в терминах эквивалентного осреднения и носит сугубо локальный характер, в некоммутирующем случае асимптотика нелокальна и имеет, вообще говоря, сложную структуру. В статье ⁽³⁾ проведен асимптотический анализ некоммутирующих аппроксимаций одномерной гиперболической системы с младшими членами. Для симметричных гиперболических систем оценки затухания разностного решения вне носителя точного решения получены для так называемых диссипативно-сжимающих схем в работе ⁽⁵⁾. Здесь рассматривается асимптотика решений простейшей аппроксимации «крест» задачи Коши для двухмерного волнового уравнения. Записывая последнее в виде эквивалентной симметрической системы

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(D)v = A_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad v|_{t=0} = v^0, \quad (1)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

разностную аппроксимацию представим в виде

$$\begin{aligned} u^{(0)n+1/2} - u^{(0)n-1/2} &= \kappa_1 (T_1^{h_1/2} - T_1^{-h_1/2}) u^{(1)n} + \kappa_2 (T_2^{h_2/2} - T_2^{-h_2/2}) u^{(2)n}, \\ u^{(1)n+1} - u^{(1)n} &= \kappa_1 (T_1^{h_1/2} - T_1^{-h_1/2}) u^{(0)n+1/2}, \\ u^{(2)n+1} - u^{(2)n} &= \kappa_2 (T_2^{h_2/2} - T_2^{-h_2/2}) u^{(0)n+1/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где T_i обозначает сдвиг на 1 по i -й координате, $\kappa_i = \tau h_i^{-1}$ предполагаются постоянными.

Полагая для точного решения v

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial t}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v,$$

представим разностное решение $u_\tau(t^n)$ (его компоненты суть $u^{(0)n+1/2}$, $u^{(1)n}$, $u^{(2)n}$ в виде (см., например, ⁽¹⁾))

$$u_\tau(t) = \mathcal{E}_\tau(t)v(t),$$

где $\mathcal{E}_\tau(t)$ — оператор погрешности. Погрешность аппроксимации, $p_\tau v$ (см., например, ⁽¹⁾), которая вычисляется в данном случае подстанов-

кой в систему (2) функции $\hat{v}(t^n)$, имеет вид

$$\rho_\tau = \frac{\tau^2}{24} \rho_0(D) + O(\tau^3),$$

где символ O понимается в смысле топологии пространства, в котором схема (2) устойчива (например, в топологии пространства F статьи ⁽¹⁾), а оператор $\rho_0(D)$ равен

$$\rho_0(D) = -\left(D^2 - \frac{\kappa_1^2 D_1^2 + \kappa_2^2 D_2^2}{2}\right) A(D) + \frac{\kappa_1^2 D_1^2 - \kappa_2^2 D_2^2}{2} (A_1 D_1 - A_2 D_2).$$

Поэтому (см. ^(1, 3)) имеет место следующая асимптотическая формула для оператора погрешности:

$$\mathcal{E}_\tau(t) = E - \frac{\tau^2}{24} \mathcal{E}(t) + O(\tau^3), \quad (3)$$

где

$$\mathcal{E}(t) = \int_0^t e^{\lambda A(D)} \rho_0(D) e^{-\lambda A(D)} d\lambda. \quad (4)$$

Обозначим $r = |x|$ и введем функции

$$f(t, x) = \frac{1}{2\pi} t \varphi\left(\frac{r}{t}\right), \quad g(t, x) = \frac{1}{2\pi} \psi\left(\frac{r}{t}\right),$$

где функции $\varphi(r)$, $\psi(r)$ равны нулю при $r > 1$, а при $r < 1$

$$\varphi(r) = \ln(1 + \sqrt{1 - r^2}) - \ln r - \sqrt{1 - r^2}, \quad \psi(r) = \ln(1 + \sqrt{1 - r^2}) - \ln r.$$

Поскольку сингулярный носитель функций $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ состоит из точки $r = 0$ и окружности $r = 1$, ведем функции $\omega_0(r)$, $\omega_1(r)$, $\omega_2(r)$, бесконечно дифференцируемые и удовлетворяющие условиям: $\sum \omega_\alpha = 1$ при $r \leq 1$, $\text{supp } \omega_0 = \{r \leq \varepsilon\}$, $\text{supp } \omega_1 = \{1/2\varepsilon \leq r \leq 1 - 1/2\varepsilon\}$, $\text{supp } \omega_2 = \{1 - \varepsilon \leq r \leq 1 + \varepsilon\}$ (ε — некоторое малое положительное число), и положим $\varphi_\alpha(r) = \varphi(r) \omega_\alpha(r)$, $\psi_\alpha(r) = \psi(r) \omega_\alpha(r)$.

Произведем соответствующее разбиение

$$f = f_0 + f_1 + f_2, \quad g = g_0 + g_1 + g_2,$$

где

$$\begin{aligned} t^{-1} f_0 = g_0 &= -\frac{1}{2\pi} \omega_0\left(\frac{r}{t}\right) \ln \frac{r}{t}, \quad f_1 = \frac{t}{2\pi} \left[\varphi_1\left(\frac{r}{t}\right) + \varphi_0\left(\frac{r}{t}\right) \right] - f_0, \\ g_1 &= \frac{1}{2\pi} \left[\psi_1\left(\frac{r}{t}\right) + \psi_0\left(\frac{r}{t}\right) \right] - g_0, \\ f_2 &= \frac{1}{2\pi} t \varphi_2\left(\frac{r}{t}\right), \quad g_2 = \frac{1}{2\pi} \psi_2\left(\frac{r}{t}\right). \end{aligned}$$

Введем операторы M_0, M_1, M_2 , действующие по формулам

$$\begin{aligned} M_0(v) &= (\kappa_1 D_1 - \kappa_2 D_2) g_0 * v, \\ M_1(v) &= P_4(D) [B(D) f_1 + C g_1] * v, \\ M_2(v) &= (\kappa_1 D_1 - \kappa_2 D_2) [B(D) f_2 + C g_2] * v, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} B(D) &= -A_1 D_2 + A_2 D_1, \quad C = A_1 A_2 + A_2 A_1, \\ P_4(D) &= D_1 D_2 (\kappa_1^2 D_1^2 - \kappa_2^2 D_2^2). \end{aligned}$$

В статье ⁽⁴⁾ была введена следующая терминология: оператор S_τ локален, если $\text{supp } S_\tau \varphi$ содержится в $\varepsilon(\tau)$ -окрестности $\text{supp } \varphi$, $\varepsilon(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$, и нелокален — в противном случае; оператор S_τ регулярен, если $|S_\tau \varphi|_m < c_m |\varphi|_m$ ($m = 0, 1, 2, \dots, c_m$ не зависят от τ , определение норм $|\cdot|_m$ см. ⁽³⁾), и нерегулярен — в противном случае.

Теорема. Оператор $\mathcal{E}(t)$ в асимптотической формуле (3) допускает следующее разложение:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= t P_3(D) + D_1 D_2 (\kappa_1 D_1 + \kappa_2 D_2) (t B(D) + C) M_0 + \\ &\quad + D_1 D_2 (\kappa_1 D_2 + \kappa_2 D_2) M_2 + M_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где операторы M_0, M_1, M_2 регулярны и определяются формулами (5),

$$P_3(D) = [(1 - \kappa_1^2) D_1^2 + D_2^2] D_1 A_1 + [D_1^2 + (1 - \kappa_2^2) D_2^2] D_2 A_2.$$

Доказывается эта теорема непосредственным вычислением $\mathcal{E}(t)$ по формуле (4) и проверкой регулярности операторов M_α .

Смысл разложения (6) состоит в следующем. Первый член этого разложения есть локальный нерегулярный оператор. Ядро оператора M_0 сосредоточено внутри круга $|r| \leq \varepsilon$, поэтому второе слагаемое в формуле (6) есть оператор, хотя и не локальный в строгом смысле, но сколь угодно близкий к таковому, ибо «размазывает» $\text{supp } v$ на произвольно малую величину ε . Этот оператор также нерегулярен. Третье слагаемое в разложении (6) (обозначим его $\hat{M}$) есть оператор совсем иного типа. Он также нерегулярен, но существенно нелокален: так как ядро оператора M_2 сосредоточено в ε -окрестности окружности $r = 1$, то оператор $\hat{M}$ описывает (нерегулярную) асимптотику в точке x^0 , зависящую от значений v вблизи окружности $\Omega_t(x^0) = \{|x - x^0| = t\}$. Поскольку ядро оператора M_2 бесконечно дифференцируемо по полярному углу, то оператору $\hat{M}$ можно придать вид

$$\hat{M}(v) = \int_{t(1-\varepsilon)}^t dr \int_{\Omega_r(x)} \sum_{l=0}^3 G_l(t, r, v) D_\nu^l v(x + vr) d\sigma,$$

где ν — нормаль к окружности $\Omega_r(x)$, D_ν — нормальная производная, и функции $\sqrt{t^2 - r^2} G_l(t, r, v)$ непрерывны.

Последнее слагаемое в формуле (6) есть регулярный оператор.

По поводу второго слагаемого разложения (6) (обозначим его $\hat{M}_0$) необходимо сделать одно замечание. Если рассматриваемые точные решения, не будучи дифференцируемыми, являются, однако, в точке непрерывными по Гёльдеру, степень нерегулярности функции $\hat{M}_0(v)$ понижается. Именно, поскольку

$$(\kappa_1^2 D_1^2 - \kappa_2^2 D_2^2) g_0 = -\frac{1}{2} (\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \delta(x) + \\ + \frac{1}{2\pi} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \frac{x_1^2 - x_2^2}{r^4} \omega_0\left(\frac{r}{t}\right) + \tilde{g}_0(t, x),$$

где $\tilde{g}_0(t, x)$ — интегрируемая функция, сосредоточенная в круге $r \leq te$, оператор $(\kappa_1 D_1 + \kappa_2 D_2) M_0$ можно представить в виде

$$(\kappa_1 D_1 + \kappa_2 D_2) M_0 = -\frac{1}{2} (\kappa_1^2 - \kappa_2^2) E + \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2\pi} M_0^{(1)} + M_0^{(2)},$$

где оператор $M_0^{(2)}$ регулярен, а оператор $M_0^{(1)}$ есть свертка с ядром $\frac{x_1^2 - x_2^2}{r^4} \omega_0\left(\frac{r}{t}\right)$. При этом интеграл $M_0^{(1)} \times v$ должен пониматься в

смысле главного значения; он допускает оценку через константу Гёльдера функции v .

Заметим, что нерегулярные части асимптотической формулы (3) с помощью методов (¹, ³) легко представить в виде локальных операторов эквивалентного осреднения (см. (³), теорема 5). Заметим также, что аналогичным образом можно рассмотреть произвольную симметричную систему с постоянными коэффициентами.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Н. Кузнецов, ДАН, 200, № 5 (1971). ² Н. Н. Кузнецов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 11, № 6 (1971). ³ Н. Н. Кузнецов, Там же, 12, № 2 (1972). ⁴ Н. Н. Кузнецов, ДАН, 204, № 1 (1972). ⁵ P. Brenner, V. Thomée, Mathematics of Computation, 25, № 114 (1971).