Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 6

УДК 517

МАТЕМАТИКА

П. Т. ДЫБОВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ШЕСТОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Н. Векуа 19 VII 1971)

И. Н. Векуа ([1a]) предложил новый метод изучения краевых задач для уравнений и систем эллиптического типа. В данной работе методом И. Н. Векуа исследуется разрешимость первой краевой задачи для уравнения эллиптического типа шестого порядка в конечной односвязной области. В круге Г: $x^2+y^2<1$ с границей γ ищется решение $u(x, y)$ уравнения

$$Lu \equiv L_0u + L_1u = f,$$

$$L_0u \equiv \sum_{k=-3}^{3} \sum_{n+m+p=k+3} A_{n1}A_{m2}A_{p3}\frac{\partial^6 u}{\partial z^{3+k}\partial \bar{z}^{3-k}}, \tag{1}$$

$$L_1u \equiv \sum_{n+m=0}^{5} B_{nm}\frac{\partial^{n+m}u}{\partial z^n\partial\bar{z}^m}, \quad B_{nm}=\bar{B}_{mn},$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u\Big|_\gamma = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\gamma = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\Big|_\gamma = 0, \tag{2}$$

где ν — направление внешней нормали; $z=x+iy$, $\partial_z = {}^1/_2(\partial_x - i\,\partial_y)$, $\partial_{\bar z} = {}^1/_2(\partial_x + i\,\partial_y)$; $A_{2s}=a_s-c_s+ib_s$, $A_{1s}=2(a_s+c_s)$, $A_{0s}= a_s-c_s-ib_s=\bar{A}_{2s}$, $s=1, 2, 3$. Считаем, что B_{nm}, $f\in L_p(\Gamma)$, $p>2$. Функции $a_s(x, y)$, $b_s(x, y)$, $c_s(x, y)$ измеримые, органиченные удовлетворяющие почти всюду в Г условиям

$$a_st^2+b_st+c_s>\Delta_0>0, \quad a_s>0, \quad -\infty<t<+\infty, \quad \Delta_0=\text{const}. \tag{3}$$

Функция $u(x, y)$ считается решением поставленной задачи, если: 1) $u(x,y)\in W_p^{(6)}(\Gamma+\gamma)$; 2) $u(x,y)$ почти везде в Г удовлетворяет уравнению (1); 3) $u(x, y)$ удовлетворяет условиям (2). Решение будем искать в виде ([1в])

$$u(x, y) = \iint_\Gamma \sigma(z,\zeta)\rho(\zeta)\,d\Gamma_\zeta \equiv W_0\rho, \tag{4}$$

$$\sigma(z,\zeta)\equiv\sigma_0(z,\zeta)+\sigma_1(z,\zeta), \quad \sigma_0(z,\zeta)\equiv\frac{1}{\pi}|\zeta-z|^4\lg|\zeta-z|^2, \quad \sigma_1(z,\zeta)\equiv$$
$$\equiv-\frac{1}{\pi}|\zeta-z|^4\lg|1-z\bar\zeta|^2+\frac{1}{\pi}|\zeta-z|^2(1-z\bar z)(1-\zeta\bar\zeta)-\frac{1}{2\pi}(1-z\bar z)^2(1-\zeta\bar\zeta)^2,$$

$$S_0\rho\equiv\iint_\Gamma\sigma_0(z,\zeta)\rho(\zeta)\,d\Gamma_\zeta, \quad V_0\rho\equiv\iint_\Gamma\sigma_1(z,\zeta)\rho(\zeta)\,d\Gamma_\zeta, \tag{5}$$

где $\zeta=\xi+i\eta$; ξ, η — вещественные переменные; $\rho(\zeta)$ — действительная функция переменных ξ, η. Обозначим

$$\frac{\partial^{n+m}W_0\rho}{\partial z^n\partial\bar z^m}\equiv W_{nm}\rho, \quad \frac{\partial^{n+m}V_0\rho}{\partial z^n\partial\bar z^m}\equiv V_{nm}\rho. \tag{6}$$

Если $\rho\in L_p(\Gamma)$, $p>2$, то $W_{nm}\rho\in H_\alpha(\Gamma+\gamma)$, $\alpha=(p-2)/p$, при $n+m=5$; $|W_{nm}\rho|\leqslant N_{nm}\|\rho\|_{L_p}$, $N_{nm}=\text{const}$ при $n+m\leqslant5$. Если $p\in$

$\in H_\alpha(\Gamma+\gamma)$, то существуют производные шестого порядка от $W_0 p$, которые определяются по формулам

$$\frac{\partial^6 W_0\rho}{\partial z^3\partial\bar z^3}=\rho, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^6 W_0\rho}{\partial z^4\partial\bar z^2}\equiv W\rho=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Gamma}\frac{\rho(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\Gamma_\zeta+\iint\limits_{\Gamma}\frac{\partial^6\sigma_1(z,\zeta)}{\partial z^4\partial\bar z^2}\rho(\zeta)\,d\Gamma_\zeta\equiv\Pi\rho+V_{42}\rho, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^6 W_0\rho}{\partial z^5\partial\bar z}\equiv W_{51}\rho=\frac{2}{\pi}\iint\limits_{\Gamma}\frac{\bar\zeta-\bar z}{(\zeta-z)^3}\rho(\zeta)\,d\Gamma_\zeta+\iint\limits_{\Gamma}\frac{\partial^6\sigma_1(z,\zeta)}{\partial z^5\partial\bar z}\rho(\zeta)\,d\Gamma_\zeta\equiv S_{51}\rho+V_{51}\rho, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^6 W_0\rho}{\partial z^6}\equiv W_{60}\rho=-\frac{3}{\pi}\iint\limits_{\Gamma}\frac{(\bar\zeta-\bar z)^2}{(\zeta-z)^4}\rho(\zeta)\,d\Gamma_\zeta+\iint\limits_{\Gamma}\frac{\partial^6\sigma_1(z,\zeta)}{\partial z^6}\rho(\zeta)\,d\Gamma\equiv S_{60}\rho+V_{60}\rho. \tag{10}$$

Если $\rho\in L_p(\Gamma)$, $p>1$, то производные шестого порядка от $W_0\rho$ существуют в смысле С. Л. Соболева [2]. С помощью неравенств А. Зигмунда и А. Кальдерона [3a, 5] и известных теорем функционального анализа операторы $W\rho$, $W_{51}\rho$, $W_{60}\rho$ продолжаем линейными ограниченными операторами в любое пространство $L_p(\Gamma)$, $p>1$, причем в этих пространствах сохраняются формулы (7)—(10). Пространства $L_p(\Gamma)$, $p>1$, операторы $W\rho$, $W_{51}\rho$, $W_{60}\rho$ переводят в себя.

Теорема 1. *Если* $\rho\in L_p(\Gamma)$, $p>1$, *то* $S_{51}\rho\equiv\Pi^2\rho$, $S_{60}\rho\equiv\Pi^3\rho$.

Теорема 2. *Если* $\rho\in L_p(\Gamma)$, $p>1$, *то* $W_{51}\rho\equiv W^2\rho$, $W_{60}\rho\equiv W^3\rho$.

Доказательство проводится методом, изложенным в [4].

Теорема 3. *Любую функцию* $u(x,y)\in W_p^{(6)}(\Gamma+\gamma)$, $p>2$, *удовлетворяющую условиям* (2), *можно представить в виде* (4).

Доказательство аналогично приведенному в [1б], стр. 333. Заменяя в уравнении (1) функцию $u(x,y)$ с помощью (4) и учитывая формулы (6)—(10), от рассматриваемой задачи переходим к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по кругу Γ

$$\rho+P\rho=f, \tag{11}$$

где $P\rho\equiv P_0\rho+T\rho$, $P_0\rho\equiv 2\operatorname{Re}\sum\limits_{k=1}^{3}\sum\limits_{n+m+p=k}A_{n1}A_{m2}A_{p3}W^k\rho$ — линейный ограниченный оператор, переводящий пространство $L_p(\Gamma)$, $p>1$, в себя, $T\rho\equiv\sum\limits_{n+m=0}^{5}B_{nm}W_{nm}\rho$ — вполне непрерывный оператор в любом пространстве $L_p(\Gamma)$, $p>2$. Здесь, не ограничивая общности, мы положили $\sum\limits_{n+m+p=3}A_{n1}A_{m2}A_{p3}\equiv 1$. Обозначим $\|W\|_{L_p}=\lambda_p$. Применяя неравенство Минковского, получаем

$$\|P_0\|_{L_p}\leqslant\operatorname{vrai\,sup}2\sum_{k=1}^{3}\Big|\sum_{n+m+p=k}A_{n1}A_{m1}A_{p3}\Big|\lambda_p^k=q_1,$$

$$\|T\|_{L_p}\leqslant\sum_{n+m=0}^{5}N_{nm}\|B_{nm}\|_{L_p}=q_2.$$

Если $q_1+q_2<1$, то применим принцип сжатых отображений. Тогда уравнение $\rho+P\rho=0$ не имеет решений в $L_p(\Gamma)$, $p>2$, а уравнение (11) имеет единственное решение $\rho\in L_p(\Gamma)$ для любого $f\in L_p(\Gamma)$, $p>2$. Отсюда следует

Теорема 4. *Если коэффициенты при старших производных уравнения* (1) *удовлетворяют условиям* (3) *и неравенству* $q_1<1$, $B_{nm}\in L_p(\Gamma)$, $p>2$, *и удовлетворяют неравенству* $q_1+q_2<1$, *то для любого* $f\in L_p(\Gamma)$, $p>2$, *рассматриваемая задача имеет единственное решение.*

Пусть B_{nm} — произвольные функции из $L_p(\Gamma)$, $p > 2$. Если $q_1 < 1$, то оператор $I + P_0$ имеет обратный $(1 + P_0)^{-1} \equiv P_*$, который также линеен и ограничен в $L_p(\Gamma)$, $p > 1$ ([5]). Применяя P_* к уравнению (11), приходим к эквивалентному функциональному уравнению $\rho + T_*\rho = P_*f$ с вполне непрерывным оператором $T_* \equiv P_*T$, для которого, согласно теории Рисса — Шаудера ([6, 7]), справедливы теоремы Фредгольма. Отсюда следует

Теорема 5. *Если коэффициенты при старших производных уравнения* (1) *удовлетворяют условию* (3) *и неравенству* $q_1 < 1$, *то рассматриваемая задача фредгольмова, т. е. задача разрешима тогда и только тогда, когда свободный член* f *удовлетворяет условиям вида*

$$\iint_{\Gamma} f\varphi_k \, d\Gamma = 0, \quad k = 1, \ldots, r, \tag{12}$$

где r *— число линейно независимых решений однородной задачи.*

В дальнейшем коэффициенты при старших производных будем считать непрерывными функциями и $L_0u \equiv 4^{-3}\Delta^3 u$ для $R_0 < |z| < 1$, где R_0 — число, сколь угодно близкое к единице. Оператор $P_0\rho$ представим в виде

$P^0\rho \equiv P_0{}^0\rho + P_0{}'\rho$, где $P_0^0\rho \equiv 2\mathrm{Re} \sum\limits_{k=1}^{3} \sum\limits_{n+m+p=k} A_{n1}A_{m2}A_{p3}\Pi^k\rho$ — линейный

ограниченный оператор, $P_0'\rho \equiv 2\mathrm{Re} \sum\limits_{k=1}^{3} \sum\limits_{n+m+p=k} A_{n1}A_{m2}A_{p3}V_{3+k,\,3-k}\rho$ — вполне

непрерывный оператор. Уравнение (11) продолжаем на всю плоскость, положив вне Γ $P \equiv 0$, $f \equiv 0$, а, следовательно, $\rho \equiv 0$. Применяя одно свойство композиции линейных операторов, установленное Т. Г. Гегелиа ([8]), оператор $I + P$ представим в виде $I + P_1 + T_1$, где $I + P_1$ — обратимый оператор в $L_p(\Gamma)$, $2 < p < 2 + \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число, а T_1 — вполне непрерывный оператор. Поэтому справедлива

Теорема 6. *Если коэффициенты при старших производных уравнения* (1) *— функции непрерывные,* $L_0u \equiv 4^{-3}\Delta^3 u$ *для* $R_0 < |z| < 1$, B_{nm}, $f \in L_p(\Gamma)$, $p > 2$, *то рассматриваемая задача разрешима в* $W_p^{(6)}(\Gamma + \gamma)$, $2 < p < 2 + \varepsilon$, *тогда и только тогда, когда* f *удовлетворяет условиям вида* (12), *где* r *— число линейно независимых решений однородной задачи.*

Далее доказываем, что справедлива

Теорема 7. *Функции* $\left| \sum\limits_{n+m+p=k} A_{n1}A_{m2}A_{p3} \middle/ \sum\limits_{n+m+p=3} A_{n1}A_{m2}A_{p3} \right.$ *— инварианты при конформных преобразованиях.*

На основании этого приходим к выводу, что теоремы 5, 6 справедливы и для первой краевой задачи в произвольной конечной односвязной области с достаточно гладкой границей. Справедлива также и теорема 4, если после конформного преобразования области на круг Γ q_2 будет таким, что $q_1 + q_2 < 1$.

Автор выражает глубокую благодарность акад. И. Н. Векуа за постановку задачи и внимание к работе.

Московский инженерно-физический институт

Поступило 7 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1а] И. Н. Векуа, ДАН, **101**, № 4, 593 (1955); [б] Обобщенные аналитические функции, М., 1959; [в] Новые методы решения эллиптических уравнений, М., 1948; [г] Матем. сборн. **31(73)**, 2, 217 (1952). [2] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950. [3] A. Calderon, A. Zygmund, а) Acta Math., 88, 85 (1952); б) Am. J. Math., 78, 289 (1956). [4] П. Т. Дыбов, Сборн. научн. работ каф. высшей матем. МИФИ, в. 2, 1962, стр. 3. [5] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М.—Л., 1937. [6] Ф. Рисс, УМН, в. 1, 175 (1936). [7] J. Schauder, Studia Math., **11**, 183 (1930). [8] Т. Г. Гегелиа, Некоторые вопросы теории многомерных сингулярных интегральных уравнений, теории потенциала и их приложений к теории упругости, Докторская диссертация, Тбилисск. матем. инст. им. А. М. Размадзе АН ГрузССР, 1964.