

В. Б. ЛАРИН, К. И. НАУМЕНКО, В. Н. СУНЦЕВ

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 15 VII 1971)

Задачи синтеза оптимальных регуляторов в цепи обратной связи при случайных внешних возмущениях обычно решаются спектральными методами, основанными на идеях оптимальной фильтрации Винера — Колмогорова, причем система с обратной связью заменяется эквивалентной разомкнутой системой ⁽¹⁾. Это приводит к необходимости использования различных алгоритмов синтеза в зависимости от динамических характеристик объекта. Так, в случае неустойчивого объекта приходится сначала решать задачу его стабилизации ⁽¹⁾ или вводить систему довольно сложных изопериметрических ограничений ⁽²⁾. Ниже эта задача решается методом, не связанным с заменой системы с обратной связью эквивалентной разомкнутой системой и поэтому в равной степени применимым к объектам с различными динамическими свойствами (устойчивым, неминимально-фазовым, неустойчивым и др.).

Задача формулируется следующим образом. Пусть движение объекта описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$Px = Mu + \psi, \quad (1)$$

где x — n -мерный вектор фазовых координат объекта, u — m -мерный вектор управляющих воздействий, ψ — n -мерный стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и дробно-рациональной матрицей спектральных плотностей S_ψ , P и M — матрицы $n \times n$ и $n \times m$ соответственно, элементы которых суть операторные полиномы от $p = d/dt$.

Требуется найти уравнение регулятора

$$W_0 u = \tilde{W} x \quad (2)$$

так, чтобы замкнутая система была устойчива (все нули характеристического определителя системы уравнений (1), (2) должны лежать в левой полуплоскости) и в установившемся режиме функционал

$$e = \sum_{i=1}^n r_i \langle x_i^2 \rangle + \sum_{i=1}^m (c_i \langle u_i^2 \rangle + \langle \dot{u}_i^2 \rangle) \quad (3)$$

достигал минимума. Здесь W_0 и $\tilde{W}$ — матрицы $m \times m$ и $m \times n$ элементы которых — операторные полиномы от p , $\langle x_i^2 \rangle$, $\langle u_i^2 \rangle$ и $\langle \dot{u}_i^2 \rangle$ — дисперсии x_i , u_i и du_i/dt , соответственно, r_i и c_i — неотрицательные весовые константы.

Метод решения основан на специальном выборе вида варьируемой матрицы при сведении задачи к решению соответствующего уравнения Винера — Хопфа в частной области.

Введем матрицы передаточных функций $F_x(s)$ и $F_u(s)$, $s = \sigma + j\omega$, связывающие преобразования Лапласа координат системы $x(s)$ и $u(s)$ и внешнего возмущения $\psi(s)$:

$$\begin{aligned} x(s) &= F_x(s) \psi(s) = [P(s) - M(s)W(s)]^{-1} \psi(s), \\ u(s) &= F_u(s) \psi(s) = W(s) [P(s) - M(s)W(s)]^{-1} \psi(s), \end{aligned}$$

где $W(s) = W_0^{-1}(s) \bar{W}(s)$ (случай, когда в уравнении оптимального регулятора (2) $\det W_0 \equiv 0$, требует особого рассмотрения).

Поскольку замкнутая система должна быть устойчивой и, следовательно, элементы матриц $F_x(s)$ и $F_u(s)$ не должны иметь полюсов в правой полуплоскости, то, полагая $s = j\omega$, функционал (3) можно записать в виде *

$$e = \frac{1}{T} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{Sp} \{ [F_x^* R F_x + F_u^* C F_u] S_\psi \} ds, \quad (4)$$

где $R = \text{diag} \{r_1, \dots, r_n\}$, $C = \text{diag} \{(c_1 - s^2), \dots, (c_m - s^2)\}$.

Таким образом, задача сводится к определению матрицы W такой, чтобы при устойчивой системе «объект + регулятор» функционал (4) достигал минимума и поэтому вариации δW при минимизации функционала (4) следует ограничить так, чтобы соответствующие вариации δF_x и δF_u функций F_x и F_u имели бы полюсы только в левой полуплоскости.

Отметим, что $n(n+m)$ элементов матриц F_x и F_u удовлетворяют n^2 уравнениям связи

$$P F_x - M F_u = E_n \quad (E_n - \text{единичная матрица}) \quad (5)$$

и, следовательно, могут быть выражены через mn независимо варьируемых функций.

Если ввести матрицу Φ размера $m \times n$,

$$\Phi = A F_x + B F_u, \quad (6)$$

где A и B — полиномиальные матрицы $m \times n$ и $m \times m$ соответственно, то все элементы матриц F_x и F_u могут быть выражены, согласно (5) и (6), через mn свободно варьируемых элементов матрицы Φ :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_u \end{bmatrix} = Z^{-1} \begin{bmatrix} E_n \\ \Phi \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где

$$Z = \begin{bmatrix} P & -M \\ A & B \end{bmatrix}.$$

Тогда функционал (4) можно записать так:

$$e = \frac{1}{T} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{Sp} \left\{ [E_n; \Phi] Z_*^{-1} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} Z^{-1} \begin{bmatrix} E_n \\ \Phi \end{bmatrix} \right\} ds. \quad (8)$$

Выясним, при каких условиях сформулированная выше задача минимизации функционала (4) эквивалентна задаче минимизации функционала (8) на классе физически реализуемых функций Φ , т. е. функций, аналитических в правой полуплоскости.

Поскольку минимум функционала (4) разыскивается на классе физически реализуемых функций F_x и F_u , а минимум функционала (8) методом Винера — Хопфа находится на классе физически реализуемых функций Φ , то при минимизации этих функционалов могут допускаться только аналитические в правой полуплоскости вариации δF_x , δF_u и $\delta \Phi$. Принимая во внимание (7), приходим к выводу, что из требования аналитичности в правой полуплоскости этих вариаций вытекает требование аналитичности в правой полуплоскости матрицы Z вместе с обратной.

Решение задачи, т. е. уравнение оптимального регулятора, имеет вид

$$[\gamma \Delta_p^* H_*^{-1} Q_*^{-1} C + K_\gamma \Gamma^{-1} M] = [K_\gamma \Gamma^{-1} P - \gamma H_*^{-1} Q_*^{-1} N_* R] x, \quad (9)$$

где $\Delta_p = \det P$, $N = \Delta_p P^{-1} M$, $Q = \Delta_p B + A N$, $H_* H = Q_*^{-1} (N_* R N + \Delta_p^* C \Delta_p) Q^{-1}$, $\Gamma \Gamma_* = S_\psi$, H и Γ — матрицы $m \times m$ и $n \times n$ соответственно, аналитические вместе с обратными в правой полуплоскости, получае-

* Здесь и далее аргумент s опускается. Индекс «*» означает операцию транспонирования и замену s на $-s$.

мые в результате факторизации соответствующих матриц, удовлетворяющих, по предположению, всем необходимым для этого требованиям ⁽³⁾, γ — общий знаменатель элементов матрицы Γ^{-1} , $K_- = [(H_*^{-1}Q_*^{-1}N_*R - HA)P^{-1}\Gamma]_-$ ($[\]_-$ — операция выделения всех правильных дробей с полюсами в правой полуплоскости). Полиномиальные матрицы A и B размера $m \times n$ и $m \times m$ определяются из условия аналитичности в правой полуплоскости матрицы Z вместе с обратной, причем решение задачи (уравнение регулятора и минимум функционала (4)) не зависит от конкретного вида матриц A и B .

Выполнение требования аналитичности матрицы Z вместе с обратной в правой полуплоскости обеспечивает устойчивость замкнутой системы «объект + регулятор», движение которой описывается уравнениями (1), (9). Действительно, характеристический определитель системы уравнений (1), (9)

$$\det \begin{bmatrix} P & -M \\ -\tilde{W} & W_0 \end{bmatrix} = \gamma^m g,$$

где гурвицев полином g — результат факторизации

$$\det \begin{bmatrix} P & 0 & -M \\ R & P_* & 0 \\ 0 & -M_* & C \end{bmatrix} = g^* g.$$

Укажем класс возмущений, относительно которых полученное решение задачи инвариантно (регулятор сохраняет свойство оптимальности). Регулятор, оптимальный при возмущениях с матрицей спектральных плотностей $S_\psi = \Gamma\Gamma_*$ будет оптимальным и при возмущениях с матрицей спектральных плотностей $S_\psi = \Gamma T T_* \Gamma_*$, где T — невырожденная матрица $n \times n$, элементы которой — константы.

Предложенный алгоритм решения эффективен и в том случае, когда необходимые для формирования закона управления фазовые координаты измеряются с помехами, т. е. закон управления разыскивается не в виде (2), а в виде

$$W_0 u = \tilde{W}(x + \varphi),$$

где n -мерный вектор φ — вектор ошибок измерения координат объекта, компоненты которого (ошибки $\varphi_i(t)$) — стационарные случайные процессы с нулевым математическим ожиданием и матрицей спектральных плотностей S_φ .

Решение задачи (уравнение оптимального регулятора)

$$\begin{aligned} & [d\Delta_p^* H_*^{-1} Q_*^{-1} C + (K_- - L_0 - L_+) dD^{-1} M] u = \\ & = [(K_- - L_0 - L_+) dD^{-1} P - dH_*^{-1} Q_*^{-1} N_* R] x. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь, в отличие от (9), $DD_* = S_\psi + PS_\varphi P_*$ (матрица D — аналитическая вместе с обратной в правой полуплоскости), $K_- = [(H_*^{-1}Q_*^{-1}N_*R - HA)P^{-1}D]_-$, $L_0 + L_+ + L_- = -H_*^{-1}Q_*^{-1}N_*RS_\varphi P_*D$ (L_0 — полиномиальная матрица, L_+ и L_- — матрицы, элементы которых — правильные дроби с полюсами только в левой и только в правой полуплоскостях соответственно), d — общий знаменатель элементов матрицы $L_+ D^{-1}$.

В данном случае уже не удастся выделить класс возмущений, аналогичный указанному выше, относительно которых регулятор, определяемый формулой (10), сохраняет свойство оптимальности.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
12 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Дж. К. Ньюто́н, Л. А. Гу́лд, Дж. Ф. Ка́йзер, Теория линейных следящих систем, М., 1961. ² Р. А. Полуэктов, Автоматика и телемеханика, № 4, 24 (1966). ³ D. S. Youla, IRE Trans., IT-7, № 3, 172 (1961).