Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 2

УДК 519.44 *МАТЕМАТИКА*

А. С. ПЕКЕЛИС

СТРУКТУРНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ РАДИКАЛЬНЫХ ГРУПП

(Представлено академиком П. С. Новиковым 10 XI 1971)

Группа G называется радикальной, если в ней имеется возрастающий нормальный ряд

$$E = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_\alpha \subset B_{\alpha+1} \subset \ldots \subset B_\beta = G$$

с локально нильпотентными факторами [1].

В настоящей работе доказывается

Теорема. *Если G — радикальная группа и φ — любой ее структурный изоморфизм, то G^φ — тоже радикальная группа.*

Для некоторых частных случаев эта теорема доказывалась в работах [2, 3]. Таким образом, проблема 23.2.2 из работы [4] о сохранении свойства радикальности при структурных изоморфизмах групп решается положительно. Указанная теорема аналогична доказанной недавно теореме Яковлева о сохранении свойства разрешимости при структурных изоморфизмах групп [5].

Будем употреблять следующие обозначения. $R(G)$ — локально нильпотентный радикал группы G [6] (радикал Плоткина — Гирша), в работе называем его просто радикалом группы G: $P(G)$ — периодический радикал группы G.

Подгруппа H группы G называется S-характеристической (структурно характеристической), если H остается неподвижной при всех автоморфизмах структуры $S(G)$ всех подгрупп группы G [7]. Известно, что максимальный периодический нормальный делитель $P(G)$ группы G есть ее S-характеристическая подгруппа [2]. Возрастающий ряд погрупп группы

$$E = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_\alpha \subset F_{\alpha+1} \subset \ldots \subset F_\beta = G$$

называется S-характеристическим рядом, если все подгруппы F_α S-характеристические в G.

Отметим, что в радикальной группе всегда существует возрастающий инвариантный ряд

$$E = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset \ldots \subset A_\gamma = G$$

с локально нильпотентными факторами [1]. Если для каждого непредельного числа β имеет место равенство $R(G / A_{\beta-1}) = A_\beta / A_{\beta-1}$, то этот ряд называется радикальным рядом группы G [1].

В радикальной группе G строим ряд

$$E = D_0 \subseteq D_1 \subseteq \ldots \subseteq D_\alpha \subseteq D_{\alpha+1} \subseteq \ldots \subset D_\mu = G$$

следующим образом: за D_1 берем $P(G)$, за D_2 — прообраз в G радикала $R(G / D_1)$, за D_3 — прообраз в G периодического радикала $P(G / D_2)$ и т. д., чередуя прообразы в G периодического и локально нильпотентного радикалов в соответствующих фактор-группах. Этот ряд может иметь повторения за счет того, что периодический радикал в некоторых фактор-группах может совпадать с единичной подгруппой. Тем не менее в радикальной групне такой ряд доходит до всей группы G. После удаления повторений получим возрастающий ряд

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\alpha \subset H_{\alpha+1} \subset \ldots \subset H_\gamma = G, \qquad (*)$$

который является инвариантным в G и все его факторы либо периодические радикальные группы, либо локально нильпотентные группы без кручения. Теорема будет доказана, если покажем, во-первых, что этот ряд является S-характеристическим в G рядом и, во-вторых, что образ периодической радикальной группы при любом ее структурном изоморфизме есть радикальная группа.

Приведем без доказательства следующее

Предложение 1. *Если G — непериодическая радикальная группа и ее радикал $R(G)$ не имеет кручения, то $R(G)$ — S-характеристическая подгруппа в G.*

Отметим только, что существенное значение при доказательстве этого предложения имеет то, что радикал $R(G)$ в радикальной группе G есть множество ее нильэлементов ([1]).

Следствие. *Построенный ряд $(*)$ радикальной группы G является ее S-характеристическим рядом.*

Остановимся подробнее на периодическом случае. Выделим в G подгруппу; назовем ее структурным радикалом $RS(G)$, если она порождается всеми S-характеристическими локально нильпотентными подгруппами группы G. Ясно, что $RS(G) \subset R(G)$. Затем в группе G строим ряд

$$E = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_\alpha \subset F_{\alpha+1} \subset \ldots \subset F_\gamma,$$

где, если β не предельное, F_β есть прообраз в G подгруппы $RS(G / F_{\beta-1})$; если же β предельное, $F_\beta = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} F_\alpha$. Этот ряд стабилизируется на некотором номере γ. Тогда G / F_γ уже полупроста в смысле структурного радикала, т. е. в G / F_γ нет локально нильпотентных S-характеристических подгрупп. Так как все F_α, $\alpha \leqslant \gamma$,— S-характеристические подгруппы в G, то F_α^φ — S-характеристические подгруппы в G^φ. Если G — периодическая радикальная группа, то для доказательства радикальности G^φ надо показать, что все факторы $F_{\alpha+1}^\varphi / F_\alpha^\varphi$, $\alpha < \gamma$, радикальны и что образ полупростой периодической радикальной группы при любом ее структурном изоморфизме есть снова радикальная группа. Сделаем это.

Локально конечную группу G назовем P-группой, если G — либо элементарная абелева p-группа, либо G порождается образующими $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_i, \ldots$ и b, связанными соотношениями $a_i^p = b^q = e$, $a_ja_i = a_ia_j$ и $b^{-1}a_ib = a_i^r$, $r \not\equiv 1$, $r^q \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$, (для конечного случая определение P-группы дано в ([8]), а также в ([7]), стр. 28).

Лемма 1. *Пусть G — локально конечная p-группа. G^φ тоже будет p-группой, за исключением случаев*

а) *G — циклическая порядка p^α, G^φ — циклическая порядка q^α, $p \neq q$;*

б) *G — группа типа p^∞, G^φ — группа типа q^∞, $p \neq q$;*

в) *G — абелева P-группа, G^φ — неабелева P-группа.*

Эта лемма легко следует из подобного описания конечных групп, данного Сузуки в работе ([8]).

Применяя теорему 4 (([7]), гл. I), получаем

Следствие 1. *Пусть G — локально нильпотентная периодическая группа. В этом случае $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_i \times \ldots$, где A_i — ее силовская p_i-подгруппа.*

Тогда $G^\varphi = A_1^\varphi \times A_2^\varphi \times \ldots \times A_i^\varphi \times \ldots$, где A_i^φ — или локально конечные q_i-подгруппы или неабелевы P-группы, причем порядки элементов в различных A_i^φ взаимно просты.

Следствие 2. *Если G — локально нильпотентная периодическая группа, то G^φ — радикальная группа, причем ее класс радикальности не больше двух.*

Отметим, что в периодической группе G радикал $R(G)$ есть прямое произведение своих силовских p_i-подгрупп A_i, а каждая A_i есть пересечение всех силовских p_i-подгрупп группы G.

Лемма 2. *Если среди силовских p_i-подгрупп локально конечной группы G, пересечение которых $A_i \neq E$, есть хотя бы одна, которая не является элементарной абелевой, то в $R(G)$ существует S-характеристическая подгруппа H группы G, содержащая A_i.*

Доказательство. Каждой силовской подгруппе A_k из $R(G)$ поставим в соответствие некоторый набор M_k силовских p_k-подгрупп группы G, если только среди силовских p_k-подгрупп группы G есть хотя бы одна, которая не является элементарной абелевой. Этот набор строится следующим образом: если среди силовских p_k-подгрупп группы G есть хотя бы одна, которая не является ни циклической, ни типа p_k^{∞}, ни элементарной абелевой p_k-подгруппой, то все такие силовские составляют набор M_k; если же среди силовских p_k-подгрупп таких нет, то M_k состоит из всех силовских циклических p_k-подгрупп порядка $\geqslant p_k^2$, либо силовских типа p_k^{∞}.

Пусть для A_i имеет место первый случай. Тогда набор M_i, согласно лемме 1, замкнут относительно всех структурных автоморфизмов группы G. Поэтому $H = \bigcap\limits_{\alpha} S_\alpha$, $S_\alpha \in M_i$,— S-характеристическая подгруппа в G. Кроме того легко видеть, что H совпадает с A_i. Следовательно, в этом случае A_i — требуемая подгруппа.

Пусть теперь для A_i имеет место второй случай. По лемме 1 образ каждой подгруппы $S_\alpha \in M_i$ при структурном автоморфизме σ группы G есть силовская p_i- или p_j-подгруппа. При этом, если для одной подгруппы S_α из M_i подгруппа S_α^σ принадлежит M_j, то $M_i^\sigma = M_j$ ([9]). Поэтому подгруппа H, равная композиту всех $\bigcap\limits_{S_\alpha \in Mi} S_\alpha^\sigma$ (σ пробегает всю группу структурных автоморфизмов группы G) S_α будет искомой.

Лемма 3. *Каждый структурный изоморфизм φ локально конечной группы G индуцирует на втором коммутанте G'' структурный изоморфизм, сохраняющий индексы.*

Эта лемма легко следует из аналогичного предложения для конечных групп (([7]), следствие 1, стр. 82).

Лемма 4. *Пусть второй коммутант G'' периодической радикальной группы G отличен от E и все силовские p_i-подгруппы группы G, пересечение которых отлично от E, элементарные абелевы p_i-подгруппы (по всем p_i).*

Тогда в $R(G)$ существует нормальный делитель $H \neq E$ группы G такой, что H^φ будет нормальным делителем в G^φ, содержащемся в $R(G^\varphi)$.

Доказательство. Возьмем подгруппу $H = R(G) \cap G''$. Она отлична от E, так как централизатор $R(G)$ радикальной группы G содержится в $R(G)$ ([1]). По лемме 3 структурный изоморфизм φ на подгруппе H сохраняет индексы.

Подгруппа H разложима в прямое произведение своих силовских p_i-подгрупп H_i, каждая из которых элементарная абелева. Тогда $H^\varphi = H_1^\varphi \times H_2^\varphi \times \ldots \times H_i^\varphi \times \ldots$ ([7]) и все H_i^φ — также элементарные абелевы p_i-подгруппы (([9]), теорема 8.1). Для доказательства инвариантности H^φ в G^φ достаточно показать, что H_i^φ инвариантна в каждой подгруппе $\{\bar{g}, H_i^\varphi\}$, где $\bar{g} \in G^\varphi$ имеет порядок r^n, r — простое число.

Если $\{\bar{g}, H_i^\varphi\}^{\varphi-1}$ содержится в силовской p_i-подгруппе группы G, то по лемме 1 $\{\bar{g}, H_i^\varphi\}$ — P-группа. А тогда инвариантность H_i^φ в $\{\bar{g}, H_i^\varphi\}$ уже легко следует.

Пусть теперь $D = \{\bar{g}, H_i^\varphi\}^{\varphi-1} = \{g, H_i\}$, где g — образующий элемент подгруппы $\{\bar{g}\}^{\varphi-1}$, имеет порядок q^n, $q \neq p_i$. Каждый элемент $h \in H_i$ содержится в конечном нормальном делителе $F_h \subset H_i$ подгруппы D. Для доказательства инвариантности H_i^φ в D^φ достаточно показать, что F_h^φ — нормальный делитель в подгруппе $\{\bar{g}, F_h^\varphi\}$. Обозначим подгруппу $\{g, F_h\}$ через D_0. В силу локальной конечности группы G, D_0 — конечная подгруппа в G. Если D_0 не является S-группой*, F_h^φ — нормальный делитель в D_0^φ ((7), теорема 14, стр. 88). Пусть теперь D_0 — S-группа. Тогда D_0 либо неабелева P-группа, либо $D_0 = \{g\} \times F_h$. Если D_0 — P-группа, то D_0^φ — тоже P-группа. А так как F_h^φ — p_i-подгруппа, то F_h^φ — нормальный делитель в D_0^φ. Если же $D_0 = \{g\} \times F_h$, то $D_0^\varphi = \{g\}^\varphi \times F_h^\varphi$ ((7), теорема 4, стр. 19), т. е. F_h^φ — опять-таки нормальный делитель в D_0^φ. Лемма доказана.

Из этой леммы и леммы 2 легко следует

Предложение 2. *Если второй коммутант радикальной периодической группы G отличен от E, то в $R(G)$ имеется S-характеристическая подгруппа $A \neq E$ группы G.*

Следствие. *Если периодическая радикальная группа полупроста (в смысле структурного радикала), то она не более чем двуступенно разрешима.*

Используя теперь теорему Яковлева (5) для случая двуступенно разрешимых групп, получаем

Предложение 3. *Если G — периодическая радикальная группа, то при любом ее структурном изоморфизме φ группа G^φ — также периодическая радикальная группа.*

Принимая во внимание следствие из предложения 1, предложение 3 и то, что образом локально нильпотентной группы без кручения при любом ее структурном изоморфизме является также локально нильпотентная группа без кручения (10), сразу получаем, что имеет место

Теорема. *Если G — радикальная группа, то при любом ее структурном изоморфизме φ группа G^φ — также радикальная группа.*

Поступило
27 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. И. Плоткин, Матем. сборн., **37** (1955), стр. 507. [2] Б. И. Плоткин, Тр. Московск. матем. общ., 6, 299 (1957). [3] А. С. Пекелис, ДАН, **133**, № 2, 281 (1960). [4] Б. И. Плоткин, УМН, **13**, в. 4, 89 (1958). [5] Б. В. Яковлев, Алгебра и логика, 9, № 3, 255 (1970). [6] Б. И. Плоткин, УМН, **9**, в. 3, 181 (1954). [7] М. Судзуки, Строение группы и строение структуры ее подгрупп, ИЛ, 1960. [8] M. Suzuki, Trans. Am. Math. Soc., **70**, 345 (1951). [9] R. Baer, Am. J. Math., **61**, 1 (1939). [10] П. Г. Конторович, Б. И. Плоткин, Матем. сборн., **35**, 187, 1954, стр. 187.

* Конечная группа G называется S-группой, если G есть прямое произведение нециклической P-группы P и подгруппы H, порядок которой взаимно прост с порядком P ((7), стр. 78).