Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 4

МАТЕМАТИКА

А. Е. ЗАЛЕССКИЙ

ОБ ОДНОМ ПРЕДПОЛОЖЕНИИ КАПЛАНСКОГО

(Представлено академиком В. М. Глушковым 24 IX 1971)

Пусть P — поле характеристики 0, G — произвольная группа, PG — групповая алгебра группы G над полем P, $e = \sum r_g g$ $(r_g \in P,\ g \in G)$ — идемпотент алгебры PG. Капланский высказал предположение, что r_1 (здесь 1 — единичный элемент группы G) является рациональным числом, если характеристика поля P равна нулю (см. ([1]) или ([2]), проблема 24). Сам Капланский доказал в ([1]), что число r_1 является алгебраическим. Другие доказательства предложены Монтгомери ([3]) и Пассманом ([4]) *.

В данной статье дается доказательство гипотезы Капланского в следующей более общей форме.

Теорема. *Пусть e — идемпотент групповой алгебры PG произвольной группы G над произвольным полем P, $e = \sum r_g g$ — его разложение по групповому базису.*

Тогда число r_1 принадлежит простому подполю поля P.

Обозначения. При $x \in PG$ через $\operatorname{supp}(x)$ обозначается множество элементов группы G, входящих в разложение $x = \sum r_g g$ с ненулевыми коэффициентами r_g. Через $[PG]$ обозначается подпространство алгебры $[PG]$, порожденное элементами вида $gh - hg$, $g, h \in G$. Если t — неотрицательное целое число, то через $t(\operatorname{supp}(x))$ обозначается подмножество элементов порядка pt из $\operatorname{supp}(x)$. Положим $\theta_t(x) = \sum_{g \in t(\operatorname{supp}(x))} r_g$; вместо $\theta_0(x)$ будем писать просто $\theta(x)$. Ясно, что $\theta(x) = r_1$. Зададим линейное преобразование λ_t: $PG \to PG$ формулой $\lambda_t(x) = \sum_{g \in t(\operatorname{supp}(x))} r_g g$. Через $P[x_1, \ldots, x_n]$ обозначается кольцо полиномов над полем P, через $P(x_1, \ldots, x_n)$ — поле рациональных функций над полем P, через Q — поле рациональных чисел.

Вспомогательные утверждения.

I) (([5]), *формула* 3.1; ([6])). *Пусть P — поле характеристики $p > 0$. Тогда* $(\sum r_g g)^p \equiv \sum r_g^p g^p \pmod{[PG]}$, $r_g \in P$, $g \in G$.

II) *Пусть P — поле характеристики $p > 0$. Тогда* $\lambda_t((\sum r_g g)^p) \equiv \lambda_t(\sum r_g^p g^p) \pmod{[PG]}$. *Кроме того,* $\theta_t((\sum r_g g)^p) = \theta_t(\sum r_g^p g^p)$.

Доказательство. Элементы множества $[PG]$ имеют вид $\sum r_g r_h (gh - hg)$, $g, h \in G$. Поэтому $\theta_t(y) = 0$ при $y \in [PG]$ и второе утверждение в II) следует из первого. Элементы gh и hg имеют одинаковый порядок, ибо они сопряжены в G. Следовательно, $\lambda_t([PG]) \subset [PG]$, так что II) следует из I).

* Во всех этих доказательствах вначале устанавливается, что $0 \leqslant |r_1| \leqslant 1$. Из нашего доказательства это неравенство не вытекает.

III) *Пусть* $f(x)$ *— полином над полем* Q, Γ *— группа Галуа полинома* $f(x)$, *реализованная в виде группы подстановок его корней* $x_1,\ldots, x_n$. *Для любой подстановки* $\gamma \in \Gamma$ *обозначим через* $(m_1(\gamma),\ldots, m_k(\gamma))$ *набор длин циклов подстановки* γ.

Тогда для любой подстановки $\gamma \in \Gamma$ *существует бесконечное множество таких простых чисел* p, *что полином* $f(x) \pmod p$ *распадается на неприводимые множители степеней* $m_1(\gamma),\ldots, m_k(\gamma)$.

В ([7]), теорема 42, этот результат выводится из теоремы Фробениуса о плотности простых чисел в отделах группы Галуа ([8]).

IV) *Пусть* P *— поле алгебраических чисел,* $r \in P$. *Предположим, что для всех, кроме конечного числа, неархимедовых нормирований поля* P *при отображении* $P_\mathfrak{p} \to P_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ *число* r *отображается в простое подполе поля* $P_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$.

Тогда r *— рациональное число.*

Доказательство (мы следуем здесь рассуждению ([9]), лемма 1.5). Пусть $f(x)$ — неприводимый полином над Q, корнем которого является r. Группа Галуа Γ полинома $f(x)$ действует на его корнях транзитивно; поэтому существует подстановка $\gamma \in \Gamma$, не оставляющая неподвижным ни один из корней полинома $f(x)$ (это вытекает из формулы 32.5 в ([10])). Согласно III для бесконечного множества простых чисел p полином $f(x) \pmod p$ не имеет линейных множителей, что, очевидно, противоречит условию.

V) *Пусть* $T = Q[x_1,\ldots, x_n]$, $b_1,\ldots, b_s \in T$. *Тогда существует постоянный на* Q *эпиморфизм* σ *кольца* T *на некоторое поле алгебраических чисел такой, что* $\sigma(x_1) \notin Q$ *и* $\sigma(b_i) \neq 0$.

Доказательство. Пусть m — максимальная степень полиномов $b_1,\ldots, b_s$ относительно x_1. Пусть $a \in Q[x_1]$ — неприводимый над Q полином, степень которого строго больше m, и $\varphi_1\colon Q[x_1] \to Q[x_1]/aQ[x_1] = R$ — естественный гомоморфизм. Тогда $\varphi_1(x_1) \notin Q$. Пусть $\varphi_2\colon Q[x_1,\ldots, x_n] \to Q[x_1,\ldots, x_n]/a\cdot Q[x_1,\ldots, x_n] = R[x_2,\ldots, x_n]$. Поскольку степень полинома, a больше степеней полиномов b_i относительно x_1, то $b_i \notin a \times Q[x_1,\ldots, x_n]$, так что $\varphi_2(b_i) \neq 0$, $i = 1,\ldots, s$. Так как пространство R^{n-1} плотно в топологии Зарисского в пространстве $\overline{R}^{n-1}$ ($\overline{R}$ — алгебраическое замыкание поля R) и множество тех точек $(x_2,\ldots, x_n) \in \overline{R}^{n-1}$, для которых $\varphi_2(b_i)\ (x_2,\ldots, x_n) \neq 0$ является открытым, то существует точка $(x_2^0,\ldots, x_n^0) \in R^{n-1}$ такая, что $\varphi_2(b_i)\ (x_2^0,\ldots, x_n^0) \neq 0$. Если обозначить через τ гомоморфизм кольца $R[x_2,\ldots, x_n]$ в поле R, задаваемый формулой $f \to f(x_2^0,\ldots, x_n^0)$, $f \in R[x_2,\ldots, x_n]$, то гомоморфизм $\tau\circ\varphi\colon Q[x_1,\ldots, x_n] \to R$ удовлетворяет требованиям утверждения V.

VI) *Пусть* A *— конечно порожденная коммутативная алгебра без делителей нуля над полем* Q, $\{I_\alpha\}$ *— множество всех максимальных идеалов алгебры* A, $R_\alpha = A/I_\alpha$, $\sigma_\alpha\colon A \to R_\alpha$. *Тогда*

1) $\bigcap\limits_\alpha i_\alpha = 0$;

2) $R_\alpha\colon Q < \infty$;

3) *для любого* $a \in A$, $a \notin Q$ *найдется такой гомоморфизм* σ_α, *что* $\sigma_\alpha(a) \notin Q$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) хорошо известны. Докажем 3). Если элемент a алгебраичен над Q, то утверждение очевидно. Предположим, что элемент a трансцендентен над Q. Пусть K — поле частных кольца A. Известно, что базис трансцендентности $x_1,\ldots, x_n$ поля K над Q можно выбрать в кольце A, причем можно считать, что $x_1 = a$. Пусть $x_1,\ldots, x_n$, $y_1,\ldots, y_m$ — система образующих алгебры A над Q и пусть $b_1,\ldots, b_s \in Q[x_1,\ldots, x_n] = T$ — знаменатели коэффициентов $a_i \in Q(x_1,\ldots, x_n)$ уравнений для элементов $y_1,\ldots, y_m$ над $Q(x_1,\ldots, x_n)$. В силу V) существует эпиморфизм σ кольца T на некоторое поле R такой, что $\sigma(a) = \sigma(x_i) \notin Q$ и $\sigma(b_i) \neq 0$, $i = 1,\ldots, s$. Пусть $L = Q(x_1,\ldots, x_n,$

$b_1^{-1}, \ldots, b_s^{-1}]$ — кольцо частных кольца T относительно $b_1, \ldots, b_s$. Ввиду универсального свойства локализации (см. ([11]), т. 1, гл. IV, § 9, теорема 14), эпиморфизм σ продолжается до эпиморфизма $\sigma_1\colon L \to R$. Пусть $B = A[b_1^{-1}, \ldots, b_s^{-1}] \supset L$. Тогда σ_1 продолжается до некоторой точки σ_2 поля K (см. ([11]), т. 2, гл. VI, теорема 4); поскольку кольцо нормирования K_{σ_2} целозамкнуто (см. там же, стр. 17), то это кольцо содержит B, ибо кольцо B является целым над L. Так как поле K конечно над полем $Q(x_1, \ldots, x_n)$, то поле вычетов R_1 точки σ_2 есть конечное расширение поля R. Таким образом, гомоморфизм $\sigma_3 = \sigma_2|_A$ кольца A удовлетворяет требованию 3).

Доказательство теоремы. Случай 1. P — поле положительной характеристики $p > 0$. Пусть s — такое целое число, что $s(\mathrm{supp}(x)) = \phi$. Тогда $\theta_s(e) = 0$. Так как $e = e^p$, то при $t > 1$, используя (11), получаем

$$\theta_{t-1}(e) = \theta_{t-1}\left(\sum r_g^p g^p\right) = \sum_{g \in t(\mathrm{supp}\,(x))} r_g^p = \Big(\sum_{g \in t(\mathrm{supp}\,(x))} r_g\Big)^p = (\theta_t(e))^p.$$

Поэтому $\theta_1(e) = \theta_2(e) = \cdots = \theta_s(e) = 0$. Аналогично, при $t = 1$

$$\theta(e) = r_1 = \theta\left(\sum r_g^p g^p\right) = r_1^p + \sum_{g^p = 1} r_g^p g^p = r_1^p + \theta_1(e) = r_1^p,$$

т. е. $r_1 = r_1^p$, откуда вытекает, что r_1 содержится в простом подполе поля P.

Случай 2. P — поле алгебраических чисел. Известно что для всех, кроме конечного числа (неэквивалентных) неархимедовых нормирований поля P числа r_g, $g \in \mathrm{supp}\,(e)$, лежат в соответствующем кольце нормирования. Обозначим через $\mathfrak{p}$ идеал нормирования, через $P_\mathfrak{p}$ — кольцо нормирования, через $\varphi : P \to P_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} = R$ — отображение на поле вычетов R и через $\bar{\varphi}_\mathfrak{p}\colon P_\mathfrak{p}G \to R_\mathfrak{p}G$ — соответствующий гомоморфизм групповых колец. Для всех, кроме конечного числа, нормирований мы имеем $e \in P_\mathfrak{p}\,G$, так что $\bar{\varphi}_\mathfrak{p}(e)$ — идемпотент в $R_\mathfrak{p}G$. В силу случая 1 $\varphi_\mathfrak{p}(r_1)$ принадлежит простому подполю поля вычетов R. Применяя IV), получаем $r_1 \in Q$.

Случай 3. P^1 — произвольное поле характеристики 0. Обозначим через A алгебру над Q, порожденную элементами r_g, $g \in \mathrm{supp}\,(e)$. Пусть σ_α — как в VI), и $\bar{\sigma}_\alpha\colon AG \to R_\alpha G$ — соответствующий гомоморфизм групповых колец. Тогда $\bar{\sigma}_\alpha(e) \in R_\alpha G$ — идемпотент, и, в силу случая 2, $\sigma_\alpha(r_1) \in Q$. Согласно VI), $r_1 \in Q$.

Теорема полностью доказана.

Институт математики
Академии наук БССР
Минск

Поступило
24 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] I. Kaplansky, Fields and Rings, Chicago, 1969. [2] I. Kaplansky, Am. Math. Monthly, **77**, № 5, 445 (1970). [3] Susan Montgomery, Bull. Am. Math. Soc., **75**, № 3, 539 (1969). [4] P. S. Passman, Proc. Am. Math. Soc., **28**, № 2, 371 (1971). [5] R. Brauer, Math. Zs., **69**, 406 (1956). [6] D. S. Passman, Michigan Math. J., **9**, 375 (1962). [7] Н. Г. Чеботарев, Основы теории Галуа, ч. 2, М.—Л., 1937. [8] G. Frobenius, Sitzber. Berl. Acad., 1896, p. 689. [9] В. Г. Спринджук, Изв. АН СССР, сер. матем., **35**, № 3 (1971). [10] Ч. Кертис, И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, «Наука», 1969. [11] О. Зарисский, П. Самюэль, Коммутативная алгебра, ИЛ, 1963.