Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 2

УДК 517.55 | *МАТЕМАТИКА*

С. И. ПИНЧУК

О СУЩЕСТВОВАНИИ ГОЛОМОРФНЫХ ПЕРВООБРАЗНЫХ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 24 XI 1971)

Пусть область $D \subset \mathbf{C}$, $H(D)$ — пространство функций, голоморфных в D. Хорошо известно, что условие существования для любой функции $f \in H(D)$, голоморфной первообразной, эквивалентно односвязности области D*.

Пусть теперь область $D \subset \mathbf{C}^n$, $n > 1$. Функция $g \in H(D)$ называется голоморфной первообразной по z_1 функции $f \in H(D)$, если выполняется равенство

$$\partial g / \partial z_1 = f. \tag{1}$$

Возникает естественная задача: каким условиям должна удовлетворять область D, чтобы для любой функции $f \in H(D)$ существовала голоморфная первообразная по z_1?

В работе [3] показывается, что односвязность области D не является достаточным условием разрешимости поставленной задачи, а если D — область голоморфности, то необходимое условие состоит в том, чтобы для любых комплексных чисел $c_2, \ldots, c_n$ пересечение области D с плоскостью $\{z_2 = c_2, \ldots, z_n = c_n\}$ было односвязным.

В настоящей заметке находятся достаточные условия разрешимости сформулированной задачи, а в случае, когда D есть область голоморфности, находятся необходимые и достаточные условия.

Пусть область $D \subset \mathbf{C}^n$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Введем обозначения: $'z = (z_1, \ldots, z_m)$, $''z = (z_{m+1}, \ldots, z_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n) = ('z, ''z)$, $D_{''z^0} = D \cap \{''z = ''z^0\}$, $U^n = U^m \times U^{n-m}$ — открытый поликруг, $T = D \cap \{U^m \times \mathbf{C}^{n-m}\}$.

Лемма. *Пусть область $D \subset \mathbf{C}^n$ такова, что для всякого $''z^0$ множество $D_{''z^0}$ связно и односвязно. Пусть U^n — поликруг, принадлежащий D, а функции $f_1, \ldots, f_m \in H(D)$ таковы, что*

$$\partial f_i / \partial z_j = \partial f_j / \partial z_i, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant m. \tag{2}$$

Тогда существует функция $g \in H(T)$ такая, что

$$\partial g / \partial z_i = f_i|_T, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Доказательство. Пусть $U^n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z_i - a_i| < r_i, \quad i = 1, \ldots, n\}$, $a' = (a_1, \ldots, a_m)$. Рассмотрим

$$g('z, ''z) = \int\limits_{('a, ''z)}^{('z, ''z)} \sum_{i=1}^{m} f_i \, dz_i, \tag{3}$$

где интегрирование ведется по кривой, соединяющей точки $('a, ''z)$ и $('z, ''z)$ и принадлежащей множеству $D_{''z}$. При фиксированном $''z$ подынтегральная форма $\omega = \sum_{i=1}^{m} f_i dz_i$ замкнута по условию. Множество $D_{''z}$ одно связно, поэтому значение $g('z, ''z)$ не зависит от кривой, соединяющей $('a, ''z)$ и $('z, ''z)$, т. е. $g('z, ''z)$ — корректно определенная функция. Не-

* Напомним, что область D называется односвязной, если в ней любой замкнутый путь гомотопен нулю.

посредственно проверяется, что $g('z, ''z)$ голоморфна и $\partial g / \partial z_i = f_i|_T$. Лемма доказана.

Пусть точки $('z^1, ''z^1)$ и $('z^2, ''z^2)$ принадлежат области D. Будем считать их эквивалентными, если $''z^1 = ''z^2$ и эти точки лежат в одной компоненте связности множества $D_{''z^1}$. Множество классов эквивалентности обозначим $\tilde{D}_m$. Возникает естественная проекция $\pi_m : D \to \tilde{D}_m$. Эта проекция индуцирует на $\tilde{D}_m$ топологию. Открытыми множествами в этой топологии будут образы открытых множеств из D. Более того, на $\tilde{D}_m$ возникает комплексная структура. Легко проверить, что если в качестве локальных координат выбрать $''z$, то $\tilde{D}_m$ будет удовлетворять всем аксиомам комплексного многообразия, кроме аксиомы отделимости. Но этого достаточно, чтобы определить на $\tilde{D}_m$ голоморфные функции, пучок ростков голоморфных функций O и группы когомологий с коэффициентами в пучке O.

Обозначим через $Z^m(D)$ множество наборов из m функций $(f_1, \ldots, f_m)$ таких, что $f_i \in H(D)$, $\partial f_i / \partial z_j = \partial f_j / \partial z_i$, $1 \leqslant i, j \leqslant b$. Через $B^m(D)$ обозначим подмножество $Z^m(D)$, состоящее из таких наборов $(f_1, \ldots, f_m)$, что $f_i = \partial g / \partial z_i$ для некоторой $g \in H(D)$.

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение.

Теорема. *Пусть область голоморфности $D \subset \mathbf{C}^n$, $1 \leqslant m \leqslant n$, и пусть для любого $''z^0$ множество $D_{''z^0}$ является односвязным.*

Тогда

$$Z^m(D) / B^m(D) \simeq H^1(\tilde{D}_m, O), \tag{4}$$

где $H'(\tilde{D}_m, O)$ — первая группа когомологий пространства $\tilde{D}_m$ с коэффициентами в пучке ростков голоморфных функций.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha{}^n\}_{\alpha \in A}$ — покрытие области D поликругами, принадлежащими D. Тогда $\tilde{\mathcal{U}}_m = \{\pi_m(U_\alpha{}^n\}_{\alpha \in A}$ — покрытие D_m. Построим гомоморфизм

$$\varphi : Z^m(D) \to H^1(\tilde{\mathcal{U}}_m, O). \tag{5}$$

Пусть $(f_1, \ldots, f_m) \in Z^m(D)$, $D_\alpha = \pi_m{}^{-1}\pi_m(U_\alpha{}^n)$. Применяя к D_α и $U_\alpha{}^n$ лемму, получим, что существует функция $g_\alpha \in H(D_\alpha)$ такая, что

$$\partial g_\alpha / \partial z_i = f_i|_{D_\alpha}. \tag{6}$$

Рассмотрим функцию

$$h_{\alpha\beta} = g_\alpha - g_\beta \in H(D_\alpha \cap D_\beta). \tag{7}$$

В силу (5) $\partial h_{\alpha\beta} / \partial z_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Поэтому можно рассматривать $h_{\alpha\beta}$ как функцию, голоморфную на $\pi_m(D_\alpha \cap D_\beta) = \pi_m(D_\alpha) \cap \pi_m(D_\beta)$. В силу (7) $\{h_{\alpha\beta}\}$ является голоморфным коциклом для покрытия $\mathcal{U}_m$. Поставим в соответствие элементу $(f_1, \ldots, f_m) \in Z^m(D)$ класс когомологий коцикла $\{h_{\alpha\beta}\}$ в группе $H^1(\mathcal{U}_m, O)$. Очевидно, что это соответствие не зависит от выбора функций g_α и является гомоморфизмом. Покажем, что его ядро есть $B^m(D)$. Пусть $\varphi(f_1, \ldots, f_m) = 0$, т. е. для любых α, $\beta \in A$ существуют функции $h_\alpha \in H(\pi_m(D_\alpha))$ и $h_\beta \in H(\pi_m(D_\beta))$, что $h_{\alpha\beta} = h_\beta - h_\alpha$. Рассматривая их как функции в $D_\alpha \cap D_\beta$, имеем $h_{\alpha\beta} = g_\alpha - g_\beta = h_\beta - h_\alpha$, или $g_\alpha + h_\alpha = g_\beta + h_\beta$. Функции $g_\alpha + h_\alpha$ определяют глобальную функцию $g \in H(D)$, что

$$g|_{D_\alpha} = g_\alpha + h_\alpha, \quad \partial g / \partial z_i = f,$$

т. е. $(f_1, \ldots, f_m) \in B^m(D)$.

Обратно, пусть $(f_1, \ldots, f_m) \in B^m(D)$. Тогда очевидно, что $\varphi(f_1, \ldots$ $\ldots, f_m) = 0$.

Покажем теперь, что φ — эпиморфизм. Пусть $\{h_{\alpha\beta}\}$ — голоморфный коцикл для покрытия $\tilde{\mathcal{U}}_m$. Его можно рассматривать как голоморфный коцикл для покрытия $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ области D. Так как D является областью голоморфности, то для любых α, $\beta \in A$ существуют функции

$$h_\alpha \in H(D_\alpha), \quad h_\beta \in H(D_\beta),$$

что в пересечении $D_\alpha \cap D_\beta$ имеем

$$h_{\alpha\beta} = h_\beta - h_\alpha, \quad \partial h_{\alpha\beta}/\partial z_i = \partial h_\beta/\partial z_i - \partial h_\alpha/\partial z_i = 0, \tag{8}$$

где $i = 1, \ldots, m$.

В силу (8) существуют функции $f_1, \ldots, f_m \in H(D)$ такие, что

$$f_i|_{D_\alpha} = \partial h_\alpha/\partial z_i.$$

Очевидно, что $(f_1, \ldots, f_m) \in Z^m(D)$ и $\varphi(f_1, \ldots, f_m) = \bar{h}$, где $\bar{h}$ — класс когомологий коцикла $\{h_{\alpha\beta}\}$.

Таким образом, доказано, что

$$Z^m(D) / B^m(D) \simeq H^1(\widetilde{\mathcal{U}}_m, O).$$

Левая часть этого равенства не зависит от покрытия $\widetilde{\mathcal{U}}_m$, поэтому, выбирая его сколь угодно мелким и переходя к прямому пределу групп $H^1(\widetilde{\mathcal{U}}_m, O)$ [1], получим (4).

Теорема доказана.

Замечание. Мы пользовались тем, что D — область голоморфности лишь тогда, когда доказывали, что φ — эпиморфизм.

Следствие 1. *Пусть область $D \subset \mathbf{C}^n$, для любого $''z^0 = (z_2^0, \ldots, z_n^0)$ множество $D_{''z^0}$ односвязно и $H^1(\widetilde{D}_1, O) = 0$.*

Тогда для всякой голоморфной функции $f \in H(D)$ существует $(g \in H(D)$, что $\partial g / \partial z_1 = f$.

Это следует из теоремы при $m = 1$ и замечания.

Следствие 2. *Пусть область голоморфности $D \subset \mathbf{C}^n$. Для того чтобы любая голоморфная функция $f \in H(D)$ имела по z_1 голоморфную первообразную $g \in H(D)$, необходимо и достаточно, чтобы область D удовлетворяла следующим условиям:*

1) *для любого $''z^0 = (z_2^0, \ldots, z_n^0)$ множество $D_{''z^0}$ односвязно;*

2) $H^1(\widetilde{D}_1, O) = 0$.

Следствие 2 вытекает из теоремы с учетом того, что условие 1) необходимо.

Проиллюстрируем полученные результаты несколькими примерами.

1. Рассмотрим область $D \subset \mathbf{C}^3$, задаваемую неравенством

$$|z_1 z_2 - z_3| < 1.$$

D — область голоморфности, она удовлетворяет условиям теоремы при $m = 1$. Очевидно, что

$$\widetilde{D}_1 = \mathbf{C}^2_{z_2 z_3} \setminus \{z_2 = 0, |z_3| \geqslant 1\}.$$

по теореме Хартогса о продолжении [2] всякая функция, голоморфная на $\widetilde{D}_1$, продолжается до целой. В $\mathbf{C}^2$ это означает, что $H^1(\widetilde{D}_1, O) \neq 0$ [2].

По доказанной теореме не всякая функция $f \in H(D)$ имеет голоморфную первообразную по z_1.

2. Пусть $D = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2\colon |z_1^2 - z_2| < 1, |z_2| > 1\}$. Здесь множество $D_{z_2^0}$ односвязно при любом z_2^0, а $\widetilde{D}_1$ представляет риманову поверхность аналитической функции $z_1 = \sqrt{z_2}$ при $|z_2| > 1$. Эта поверхность является многообразием Штейна и, следовательно, $H^1(\widetilde{D}_1, O) = 0$.

3. Пусть $D = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 : |z_1^2 - z_2| < 1\}$. Здесь $\widetilde{D}_1$ не будет комплексным многообразием (не выполнена аксиома отделимости) и можно показать, что $H^1(\widetilde{D}_1, O) \neq 0$.

В заключение автор пользуется случаем выразить благодарность проф. Б. В. Шабату за постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Хёрмандер, Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, М., 1968. [2] Б. В. Шабат, Введение в комплексный анализ «Наука», 1969. [3] I. Wakabayashi, Proc. of the Japan Academy, Tokyo, 44, 820 (1968).