

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

Д. В. ЧУДНОВСКИЙ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 1 XI 1971)

В работе продолжают исследования топологических свойств тихоновских произведений дискретных пространств типа $X_m \subset N^m$ и $X_m \subset \prod_{\text{Cl}} X_\xi$ и т. п., начатые в работах ^(1, 5) и ^(2, 4, 10). Приводится теоретико-множественная характеристика важного класса M^* (см. ⁽⁴⁾) в терминах компактности инфинитарного языка. Эта характеристика ($M^* = SI$) уточняет результаты ⁽⁴⁾ о «строгой некомпактности» кардиналов из M^* . Полученные результаты позволяют решить проблему С. Мрувки ⁽¹⁾ о существовании кардинала $m < 2^{\omega_0}$, $m \notin M$ и аналогичную проблему из ⁽¹³⁾.

Рассматриваются также вопросы о m -компактности N^m . Дается отрицательный ответ на вопросы П. Эрдеша и А. Хайнала, (ср. ⁽⁴⁾). Доказывается (теорема 4), что с теорией множеств $ZF + MC$ совместимо условие « $N_0^{k_0+}$ не k_0^{+} -компактно», где k_0 — первый измеримый кардинал.

1. Воспользуемся стандартной терминологией общей топологии и теории множеств из ^(3, 6, 8). Символы $\alpha, \beta, \gamma, m, n, k$ обозначают кардиналы (т. е. начальные ординалы); $\xi, \zeta, \mu, \eta, \rho$ — произвольные ординалы, причем всякий ординал отождествляется с множеством всех меньших. Символом X_ξ обозначим дискретное пространство на ординале ξ . Если X, Y — топологические пространства, то $X \subset Y$ означает, что X гомеоморфно замкнутому подмножеству Y . Будем здесь рассматривать топологические условия (ср.

^(1, 4)) $S_1(m): X_m \subset N^m$ и $S_6(m): X_m \subset \prod_{\text{Cl}} X_\xi$. $S_1(m)$ было введено в

⁽¹⁾, где обозначалось через $m \in M$. Условие $S_6(m)$, обозначенное в ⁽¹⁾ через $R(m)$, детально рассматривалось в ⁽⁴⁾, где $S_6(m)$ обозначалось $m \in M^*$. Обозначения M и M^* будут сохранены в данной работе.

Условия $S_1(m)$ и $S_6(m)$ имеют простые эквиваленты, сформулированные в терминах матриц множеств. По поводу «матричной» формы условия $S_1(m)$ см. ^(1, 2). Условие $S_6(m)$ рассмотрим более детально.

Предложение 1. Для любого m условие $S_6(m)$ эквивалентно следующему:

$S'_6(m):$ существует семейство $\{A_{\eta}^{(\xi)}: \eta < \xi\}$, $\xi < m$, подмножеств m такое, что $A_{\eta_1}^{(\xi)} \cap A_{\eta_2}^{(\xi)} = \emptyset$ при $\xi < m$; $\eta_1, \eta_2 < \xi$ и $\eta_1 \neq \eta_2$; $\bigcup_{n < \xi} A_n^{(\xi)} = m$ для любого $\xi < m$ и, наконец, для любой функции $f: m \rightarrow m$, $f(\xi) < \xi$; $\xi < m$, существует конечное множество $C \subset m$, удовлетворяющее условию: $\bigcap_{\xi \in C} A_{f(\xi)}^{(\xi)}$ не более чем одноэлементно.

Замечание 1. Для бесконечных кардиналов m при замене условия « $\bigcap_{\xi \in C} A_{f(\xi)}^{(\xi)}$ не более чем одноэлементно» в $S'_6(m)$ на « $\bigcap_{\xi \in C} A_{f(\xi)}^{(\xi)}$ конечно» получаем условие $S''_6(m)$, эквивалентное $S_6(m)$. Доказательство этого факта весьма просто, так как $m^{\omega_0} = m$. С помощью замечания ⁽¹⁾ и техники ⁽²⁾ получаем следующий результат.

Теорема 1 ⁽⁴⁾. Условие $m \notin M^*$ (т. е. $\neg S_6(m)$) для бесконечных m эквивалентно условию

$S_6^*(m)$: для всякой совокупности $\{\mathfrak{M}_\xi : \xi \in \Xi\}$ семейств подмножеств m , где $\bigcup \mathfrak{M}_\xi = m$, $\Xi = m$ и $\overline{\mathfrak{M}_\xi} < m$ для $\xi < m$, существует неглавный ультра-фильтр $\mathcal{D}$ на m такой, что для любого $\xi < m$ существует $A_\xi \in \mathfrak{M}_\xi$ с $A_\xi \in \mathcal{D}$.

Замечание 2. В теореме 1 ультрафильтр $\mathcal{D}$ может быть выбран однородным на m , т. е. $A \in \mathcal{D}$ влечет $A = m$. Для этого достаточно к семейству $\{\mathfrak{M}_\xi : \xi \in \Xi\}$ присоединить семейство $\{\mathfrak{M}_\xi : \xi < m\}$, где $\mathfrak{M}_\xi = \{m \setminus \xi, \{\zeta\} : \zeta < \xi\}$ при $\xi < m$. Тогда, применяя к полученной совокупности теорему 1, получим требуемый ультрафильтр $\mathcal{D}$ такой, что $m \setminus \xi \in \mathcal{D}$ при $\xi < m$, т. е. $\mathcal{D}$ однороден.

При обобщенной континуум-гипотезе (ОКГ) или даже при более слабых предположениях (например, все слабо недостижимые кардиналы строго недостижимы) $M^* = C_0$. Это вытекает из ⁽³⁾, теорема 4.32. В общем же случае, например, если $2^{\omega_0} = \text{«достаточно большой»}$ кардинал, $M^* \neq C_0$ (см. теорему 3). Однако класс M^* имеет естественную характеристику в терминах строгой некомпактности кардиналов (см. ^(9, 4)).

Напомним определение инфинитарных языков $L_{\alpha, \beta}$, где α, β — бесконечные кардиналы. Язык $L_{\alpha, \beta}$ является расширением обычного языка первого порядка ⁽⁸⁾, в которое включены правила, разрешающие конъюнкции и дизъюнкции $< \alpha$ формул и допускающие квантификации $\forall$ или $\exists$ по $< \beta$ переменным. (Более подробное описание языка $L_{\alpha, \beta}$ см. в ^(9, 8).) В ряде работ ^(9, 13) исследуется возможность обобщения теоремы компактности Мальцева с обычного языка (L_{ω_0, ω_0}) , например, на L_{m, ω_0} . В соответствии с ⁽⁹⁾ кардинал m называется строго некомпактным ($m \in SI$), если язык L_{m, ω_0} не (m, m) -компактен, т. е. если существует множество Σ аксиом (т. е. формул без свободных переменных) языка L_{m, ω_0} , $\overline{\Sigma} = m$, не имеющее модели, хотя каждое $\Sigma' \subseteq \Sigma$, $\overline{\Sigma'} < m$ имеет модель. Класс SI связан с C_0 , так как C_0 состоит (см. ⁽³⁾, стр. 227, и ⁽⁹⁾, стр. 262) из достижимых и строго некомпактных кардиналов: $C_0 = SI \cup AC$.

Класс M^* имеет естественную характеристику в терминах SI : $M^* = SI$ (теорема 2). Это дополняет следующий результат С. Мрувки ⁽⁴⁾:

Предложение 2. $M^* \subseteq SI$.

Доказательство предложения 2 очевидно: для этого достаточно записать на языке L_{m, ω_0} условия предложения 1. К полученной аксиоме языка L_{m, ω_0} необходимо добавить следующую систему аксиом: $\bar{c}_0 > \xi$ и $\forall x (x < \xi \rightarrow V_{\eta < \xi} x = \eta)$ для любого $\xi < m$, где $\bar{c}_0$ — новая внелогическая константа.

Доказательство $SI \subseteq M^*$ несколько более сложно. Заметим, что для любой аксиомы φ языка L_{m, ω_0} сигнатура (т. е. множество внелогических символов) которой — μ , существует новая сигнатура $\mu' \supseteq \mu$, $\overline{\mu'} < m$, и семейство Ω_φ множество формул языка первого порядка сигнатуры μ' с одной свободной переменной такие, что $\overline{\Omega_\varphi} < m$ и

($\mathcal{O}_\varphi$) для всякой модели $\mathfrak{A}$ сигнатуры μ $\mathfrak{A} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда существует такая интерпретация символов из $\mu' \setminus \mu$ на $\mathfrak{A}$, что в полученной модели $\mathfrak{A}'$ отбрасывается $\Omega_\varphi(v_0)$, т. е. $\mathfrak{A}' \models \forall x \neg (\& \Delta(x))$ при $\Delta \in \Omega_\varphi$.

Доказательство этого можно найти в ⁽⁹⁾, § 5. Используемые простые сведения по теории моделей (теорема Лося, элементарные подсистемы и т. п.) можно найти в ^(8, 9).

Теорема 2. $M^* = SI$.

Для $m \notin M^*$ (m, m) -компактность L_{m, ω_0} исследуется так. Пусть семейства Ω_ξ множеств формул сигнатуры μ_0 такие, что $\mathfrak{A}_\xi$ отбрасывает Ω_ξ при $\xi < \bar{\xi}$. В силу ($\mathcal{O}_\varphi$) достаточно показать, что существует модель $\mathfrak{A}$, отбрасывающая $\Omega_\xi(v_0) : \xi < m$.

Построим $\mathfrak{A}$ методом сколемовского произведения моделей $\mathfrak{A}_\xi : \xi < m$ по некоторому ультрафильтру на m (ср. ⁽⁸⁾, стр. 108). Пусть $\mathfrak{A}_\xi = \langle A_\xi; \dots \rangle : \xi < m$, $A = \prod_{\xi < m} A_\xi$ — произведение основных множеств $\mathfrak{A}_\xi$.

Выберем семейство $F \subseteq A$, удовлетворяющее условию: $\overline{F} \leq m$ и

1) Если $\Phi(v_0, \dots, v_n)$ — формула сигнатуры μ_0 со свободными переменными $v_0, \dots, v_n$ и $f_1, \dots, f_n$ — функции в F , тогда существует функция $g \in F$ такая, что $\mathfrak{A}_\xi \models (\forall v_0) \Phi(v_0, f_1(\xi), \dots, f_n(\xi)) \rightarrow \Phi(g(\xi), f_1(\xi), \dots, f_n(\xi))$ для $\xi < m$.

Пусть $\mathfrak{A}_\mathcal{D} = \prod_{\xi < m} \mathfrak{A}_\xi / \mathcal{D}$ — ультрапроизведение $\mathfrak{A}_\xi$ по ультрафильтру $\mathcal{D}$. F — множество, удовлетворяющее (1) и $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\mathcal{D} \upharpoonright F$ — модель, основное множество которой — совокупность $F / \mathcal{D}$.

Используя обычную теорему Лоса для ультрапроизведения ⁽¹²⁾, получаем

(L) если $\Phi(v_1, \dots, v_n)$ — формула языка первого порядка сигнатуры μ_0 и $a_1 = f_1 / \mathcal{D}, \dots, a_n = f_n / \mathcal{D}$ — элементы $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \{ \xi < m : \mathfrak{A}_\xi \models \Phi(f_1(\xi), \dots, f_n(\xi)) \} \in \mathcal{D}$.

Пусть $\Omega_\xi = \{ \Delta_\xi^{(p)} : p < m \}$. Полагаем $\Xi = F \times m \times m$ и $\langle f, \xi, p \rangle \in \Xi$.

Для $\varphi(v_0) \in \Delta_\xi^{(p)}$ пусть $B_{\langle f, \xi, p \rangle}(\varphi) = \{ \xi < m : \mathfrak{A}_\xi \models \neg \varphi(\xi) \}$ и $B_{\langle f, \xi, p \rangle}^* = \{ \xi < m : \mathfrak{A}_\xi \models \varphi(f(\xi)) \}$ для всякого $\varphi \in \Delta_\xi^{(p)}$. Определяем $\mathfrak{R} < \langle f, \xi, p \rangle = \{ B_{\langle f, \xi, p \rangle}(\varphi), B_{\langle f, \xi, p \rangle}^*(\varphi) \}_{\varphi \in \Delta_\xi^{(p)}}$. Поскольку $\overline{\Delta_\xi^{(p)}} < m$ при $\xi < m$, то и

$\mathfrak{R} \langle f, \xi, p \rangle < m$ при $\langle f, \xi, p \rangle \in \Xi$. Ввиду $S_\kappa^*(m)$ существует ультрафильтр $\mathcal{D}$ такой, что для любого $f \in F$ и $\xi, p < m$ существует $B \in \mathfrak{R} \langle f, \xi, p \rangle$ с $B \in \mathcal{D}$ и по замечанию 2 $\mathcal{D}$ может быть выбран однородным на m ; значит, при $\langle f, \xi, p \rangle \in \Xi$ существует $\varphi \in \Delta_\xi^{(p)}$ с $B_{\langle f, \xi, p \rangle}(\varphi) \in \mathcal{D}$. Поэтому $\mathfrak{A}$ отбрасывает $\Omega_\xi : \xi < m$.

Теорема 2 может быть применена для более точной характеристики класса M (ср. ⁽²⁾). Результат, аналогичной теореме 2, имеет место и для языка $L_{m, m}$.

2. Остановимся на проблеме ⁽¹⁾: будет ли $[\omega_0, 2^{\omega_0}] \subseteq M$? Всегда $2^{\omega_0} \in M$ и вообще, когда 2^{ω_0} не слишком велик (т. е. первый слабо недостижимый кардинал), $[\omega_0, 2^{\omega_0}] \subseteq M$. Однако в общем случае (как увидим ниже) может существовать кардинал $m < 2^{\omega_0}$, $m \notin M^*$ (и подавно, $m \in M \subseteq M^*$). Этот результат связан с так называемыми Π_1^1 -неразличимыми кардиналами. Под Π_1^1 -формулой понимаем формулу вида $\forall X_1 \dots \forall X_n \varphi(X_1, \dots, X_n)$, где $\forall X_i$ — универсальные кванторы по предикатным переменным, $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ — формула языка первого порядка и $X_1, \dots, X_n$ в φ -предикатные символы. Кардинал k Π_1^1 -неразличим в смысле ^(7, 11), если для любых предикатов $R_1, \dots, R_n$ на k и Π_1^1 -аксиомы $\varphi(<, R_1, \dots, R_n)$ из $\langle k; \leq, R_1, \dots, R_n \rangle \models \varphi$ вытекает, что для некоторого $\lambda < k$ $\langle \lambda; \leq, R_1 \upharpoonright \lambda, \dots, R_n \upharpoonright \lambda \rangle \models \varphi$.

Известен (см. ⁽⁹⁾, стр. 261) классический результат, что для строго недостижимых кардиналов $m > \omega_0$ Π_1^1 -неразличимость эквивалентна компактности (т. е. $m \notin C_0$). Однако К. Кунен ⁽⁷⁾ показал, что может существовать Π_1^1 -неразличимый кардинал $< 2^{\omega_0}$.

Теорема 3. Из непротиворечивости $ZF +$ «существует компактный ($\notin C_0$) кардинал $> \omega_0$ » вытекает совместимость «существует $m < 2^{\omega_0}$, $m \notin M^*$ », с ZF .

Теорема 3, в силу результатов ⁽¹¹⁾, показывает, что теорема 3 из ⁽¹⁰⁾ может быть значительно обобщена на классы $M^{\infty \dots (AC)} \setminus \overline{AC}$ и $M^{\infty \dots (AC)} \setminus AC$.

К свойству $S_1(m)$ тесно примыкает « N^m не m -компактно». Вопрос о совпадении этих свойств был поставлен в ⁽⁴⁾. С помощью результата ⁽¹²⁾

покажем, что эти свойства, вообще говоря, не совпадают. Имеет место ($MC \Rightarrow$ «существует измеримый ⁽³⁾ кардинал»).

Теорема 4. Если теория множеств $ZF + MC$ совместима, то теория множеств $ZF + MC$ « $N^{k_0^+}$ не k_0^+ -компактно», где k_0 -первый измеримый кардинал, совместима.

Теорема 4 доказывается с помощью того (ср. ⁽³⁾), что из k_0^+ -компактности $N^{k_0^+}$ при $2^{k_0} = k_0^+$ вытекает, что всякий k_0 -полный фильтр над k_0 расширяется до k_0 -полного ультрафильтра. Отметим, что уже в модели $L[\mathcal{U}]$, построенной в ⁽¹²⁾, $N^{k_0^+}$ не k_0^+ -компактно.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
3 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. Mrowka, Bull. Acad. Polon. Sci., **14**, 597 (1968). ² Д. В. Чудновский, Препринт ИМ-70-4, Инст. матем. АН УССР, Киев, 1970. ³ H. Keisler, A. Tarski, Fund. Math., **53**, 225 (1964). ⁴ S. Mrowka, Proc. Am. Math. Soc., **25**, 705 (1970). ⁵ S. Mrowka, Bull. Acad. Polon. Sci., **17**, 411 (1969). ⁶ К. Куратовский, Топология, **1**, М., 1966. ⁷ K. Kunen, Proc. Symp. Pure Math., **13**, 199 (1970). ⁸ C. C. Chang, Sets, Models and Recursion Theory, Amsterdam, 1967, p. 85. ⁹ M. Dickmann, Lecture Notes Series, № 20, Aarhus, 1970. ¹⁰ A. Hajnal, Bull. Acad. Polon. Sci., **17**, 683 (1969). ¹¹ A. Levy, Proc. Symp. Pure Math., **13** (1970). ¹² K. Kunen, Ann. Math. Log., **1**, № 2, 179 (1970). ¹³ X. Кейслер, Матем. логика и ее примен., М., 1965.