

УДК 513.88:513.83+517.948

МАТЕМАТИКА

А. А. ПАНКОВ

О ФАКТОРИЗАЦИИ ГОЛОМОРФНЫХ НЕТЕРОВЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 14 X 1971)

В настоящей заметке устанавливается существование разложения голоморфной нетеровой оператор-функции на множители, отвечающего разложению характеристического множества на неприводимые ветви.

1. Пусть E — банахово пространство и X — комплексное аналитическое пространство. Обозначим через $\mathcal{O}^E$ пучок ростков голоморфных функций со значениями в E .

Пусть E и F — банаховы пространства и A — оператор из $L(E, F)$. Придерживаясь терминологии (1), говорим, что A нетеров, если $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$ и $\operatorname{codim} \operatorname{Im} A < \infty$. Термин «фредгольмов» употребляется для операторов A таких, что $\operatorname{ind} A = \dim \operatorname{Ker} A - \operatorname{codim} \operatorname{Im} A = 0$.

Голоморфная оператор-функция $A: X \rightarrow L(E, F)$ называется нетеровой (фредгольмовой), если для каждого $x \in X$ $A(x)$ — нетеров (фредгольмов) оператор. Голоморфные оператор-функции часто будем рассматривать как гомоморфизмы пучков $A: \mathcal{O}^E \rightarrow \mathcal{O}^F$, не делая различия в обозначениях. Ядро (образ) такого гомоморфизма мы обозначаем $\operatorname{ker} A$ ($\operatorname{im} A$).

В изучении голоморфных нетеровых оператор-функций важную роль играют следующие «характеристические» множества: $S_k(A) = \{x \in X | \dim \operatorname{Ker} A(x) \geq k\}$ и $CS_k(A) = \{x \in X | \operatorname{codim} \operatorname{Im} A(x) \geq k\}$. Как показано в (2, 3), $S_k(A)$ и, следовательно, $CS_k(A)$ являются аналитическими подпространствами в X . Будем писать также $S(A)$ ($CS(A)$) вместо $S_1(A)$ ($CS_1(A)$).

Если $\mathcal{G}$ — подпучок аналитического пучка $\mathcal{F}$, то мы обозначаем $\tau_F(\mathcal{G})$ или $\tau(\mathcal{G})$ пучок радикалов $\mathcal{O}$ -модуля $\mathcal{G}$ в $\mathcal{F}$. $\mathcal{G}$ называется примарным, если стебель $\mathcal{G}_x$ в каждой точке $x \in X$ является примарным подмодулем стебля $\mathcal{F}_x$. Если $\mathcal{F}$ — когерентный пучок идеалов, то через $N(\mathcal{F})$ обозначается его множество нулей.

2. Пусть $\mathcal{F}$ — подпучок в $\mathcal{O}^E$. Мы будем рассматривать подпучки, удовлетворяющие в окрестности некоторого компакта $K \subset X$ условию (Φ_K) : в окрестности K существует такой голоморфный проектор P , что $\dim \operatorname{Ker} P < \infty$, $\operatorname{im} P \subset \mathcal{F}$ и фактор-пучок $\mathcal{F} / \operatorname{im} P = \mathcal{F}_P$ когерентен (в окрестности K).

Легко видеть, что если P — проектор из условия (Φ_K) , то фактор-пучок $\mathcal{O}^E / \operatorname{im} P = \mathcal{O}_P^E$ является локально свободным пучком конечного типа в окрестности K . Очевидно, что пучок $\mathcal{F}_P$, определенный в окрестности K , является подпучком пучка $\mathcal{O}_P^E$.

Имеет место следующая простая

Лемма 1. $\tau_{\mathcal{O}^E}(\mathcal{F}) = \tau_{\mathcal{O}_P^E}(\mathcal{F}_P)$.

Отсюда и из результатов (8) о примарном разложении когерентных подпучков вытекает

Теорема 1. Каждый подпучок $\mathcal{F}$ пучка $\mathcal{O}^E$, удовлетворяющий в окрестности компакта K условию (Φ_K) , допускает в этой окрестности несократимое примарное разложение

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{F}^{(i)},$$

причем

$$\mathfrak{r}(\mathcal{F}) = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{r}(\mathcal{F}^{(i)}).$$

Для доказательства наших основных результатов необходима следующая

Лемма 2. *Подпучок $\mathcal{F}$ пучка $\mathcal{O}^E$ удовлетворяет в окрестности K условию (Φ_K) тогда и только тогда, когда существуют банахово пространство E и голоморфная нётерова оператор-функция A со значениями в $L(E, F)$, определенная в окрестности K , такие, что $\mathcal{F} = \text{im } A$ в окрестности K .*

Следующий результат в конечномерном случае (по крайней мере для полиномиальных матриц) известен (см. (5)).

Теорема 2. *Для нётеровой оператор-функции A*

$$CS(A) = N(\mathfrak{r}(\text{im } A)).$$

Эта теорема, по существу, локальна и доказательство сводится к конечномерному случаю. В доказательстве существенно используются результаты локальной части работы (7).

Теорема 3. *Пусть X — пространство Штейна, K — голоморфно выпуклый компакт в X и A — голоморфная нётерова оператор-функция на X со значениями в $L(E, F)$. Пусть в окрестности K множество $CS(A)$ разлагается на неприводимые ветви $V_1, \dots, V_k$.*

Тогда существуют банаховы пространства $E_0 = F, E_1, \dots, E_k$, не зависящее от точки $x \in X$ вложение $T \in L(E, E_k)$ и определенные в окрестности K голоморфные нётеровы оператор-функции A_i со значениями в $L(E_i, E_{i-1})$ такие, что

- 1) $\text{codim Im } T < \infty$;
- 2) $CS(A_i) = V_i, i = 1, \dots, k$ в окрестности K ,
- 3) $A = A_1 A_2 \dots A_k T$ в окрестности K .

Схема доказательства. Пусть $\mathcal{F} = \text{im } A$. В силу леммы 2 и теоремы 1 справедливо примарное разложение $\mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F}^{(j)}$, причем $\mathfrak{r}(\mathcal{F}) = \bigcap \mathfrak{r}(\mathcal{F}^{(j)})$. Для простоты можно считать, что $\mathfrak{r}(\mathcal{F}^{(j)}) = \mathcal{F}_{V_j}$, где $\mathcal{F}_{V_j}$ — пучок идеалов подпространства V_j . В силу леммы 2 найдется нётерова оператор-функция A_1 со значениями из $L(E_1, F)$ такая, что $\text{im } A_1 = \mathcal{F}^{(1)}$. Используя теорему 2 и тот факт (4), что когерентный пучок, заданный на пространстве Штейна, на каждом голоморфно выпуклом компакте порождается конечным числом своих глобальных сечений, можно показать, что найдется голоморфная нётерова оператор-функция A' со значениями в $L(E', E_1)$ и постоянное вложение $T' \in L(E, E')$, $\text{codim Im } T' < \infty$, такие, что $A = A_1 A' T'$ в окрестности K и $CS(A') = \bigcup_{j=2}^k V_j$. Теперь доказательство заканчивается по индукции.

Замечание 1. Фактически оказывается, что пространства E_i в теореме 3 имеют вид

$$E_j = F \oplus \mathbb{C}^{q_j}, \quad j = 1, \dots, k-1, \quad E_k = F \oplus \bigoplus_{j=1}^k \mathbb{C}^{q_j}.$$

Замечание 2. Можно показать, что, если $\mathfrak{r}(\text{im } A) = \bigcap_{j=1}^k \mathcal{F}_j$ — несократимое примарное разложение, то A можно разложить в произведение $A = A_1 A_2 \dots A_k T$, где $\mathfrak{r}(\text{im } A_j) = \mathcal{F}_j$.

Используя отображения двойственности, из теоремы 3 и замечания 1 получаем следующий результат.

Теорема 3*. *Пусть X — пространство Штейна, K — голоморфно выпуклый компакт из X и A — голоморфная нётерова оператор-функция на X со значениями в $L(E, F)$. Пусть $S(A)$ разлагается в окрестности K на неприводимые ветви $W_1, \dots, W_k$.*

Тогда существуют банаховы пространства $E_0 = E, E_1, \dots, E_k$, постоянное сюръективное отображение $R \in L(E_k, E)$ и голоморфные нётеровы

оператор-функции A_j со значениями в $L(E_{j-1}, E_j)$, заданные в окрестности K , такие, что

- 1) $\dim \text{Ker } R < \infty$;
- 2) $S(A_j) = W_j$, $j = 1, \dots, k$, в окрестности K ;
- 3) $A = RA_k A_{k-1} \dots A_1$ в окрестности K .

Как показывает приводимый далее пример, избавиться от «лишних» множителей T и R в теоремах 3 и 3*, вообще говоря, нельзя. Имеется следующий частный результат.

Теорема 4. Пусть X — некоторое аналитическое множество в окрестности нуля пространства $\mathbb{C}^n$ и A — голоморфная фредгольмова ($\text{ind } A = 0$) оператор-функция на X со значениями в $L(E, F)$. Предположим, что $\dim \text{Ker } A \leq 1$ и $S(A) = \bigcup_{j=1}^k W_j$ — неприводимое разложение аналитического множества $S(A)$.

Тогда в окрестности нуля справедливо представление

$$A = A_1 A_2 \dots A_k,$$

где A_j — фредгольмовы оператор-функции и $S(A_j) = W_j$.

3. Основой построения указанного выше примера является простая лемма, которая выводится из единственности несократимого примарного представления подмодуля, имеющего только изолированные ассоциированные простые идеалы ⁽⁶⁾. Через $\mathcal{O}_0$ обозначено кольцо ростков голоморфных функций в нуле пространства $\mathbb{C}^n$.

Лемма 3. Пусть $A: \mathcal{O}_0^q \rightarrow \mathcal{O}_0^p$ — $\mathcal{O}_0$ -гомоморфизм и $\text{im } A = M$. Предположим, что M имеет в точности два изолированных ассоциированных простых идеала J_1, J_2 и M_1, M_2 — соответствующие элементы примарного разложения M . Если $A = A_1 A_2$, где $A_1: \mathcal{O}_0^q \rightarrow \mathcal{O}_0^p$ и $A_2: \mathcal{O}_0^q \rightarrow \mathcal{O}_0^r$, причем $\text{r}(\text{im } A_1) = J_1$ и $(\text{im } A_2) = J_2$, то $\text{im } A_1 = M_1$.

Пусть теперь $A(z): \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}^3$, задается матрицей $(z_2^2, z_2 - z_1 z_3)$. Тогда $CS(A) = \{z_1 = z_2 = 0\} \cup \{z_2 = z_3 = 0\} = V_1 \cup V_2$. Примарное разложение $M = \text{im } A$ состоит из идеалов $M_1 = (z_1^2, z_2^2, z_2 - z_1 z_3)$ и $M_2 = (z_2^2, z_3^2, z_2 - z_1 z_3)$ (примарность M_1 и M_2 доказана в ⁽⁶⁾, стр. 202–204), которые, очевидно, являются изолированными компонентами. Простые вычисления показывают, что идеалы M_1 и M_2 имеют не менее трех образующих. Если теперь $A = A_1 A_2$, где $A_1(z): \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}$, $A_2(z): \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^r$, $CS(A_1) = V_1$ и $CS(A_2) = V_2$, то, в силу леммы 3, $\text{im } A_1 = M_1$. Следовательно, $r \geq 3$, что противоречит равенству $CS(A_2) = V_2$.

В заключение автор выражает благодарность С. Г. Крейну за постоянное внимание и многочисленные полезные замечания.

Поступило
5 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. Ганнинг, Х. Росси, Аналитические функции многих комплексных переменных, М., 1969.
- ² С. Г. Крейн, В. П. Трофимов, Функциональный анализ, 3, в. 4 (1969).
- ³ С. Г. Крейн, В. П. Трофимов, Тр. математического фак. Воронежск. гос. ун-в., 63 (1970).
- ⁴ С. Г. Крейн, Липейные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», 1971.
- ⁵ В. П. Паламонов, Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, М., 1967.
- ⁶ Э. П. Серр, Сборн. Математика, 7, 5, 3 (1963).
- ⁷ М. А. Шубин, Матем. исследования, 5, в. 4, 153 (1970).
- ⁸ J. M. T. Sin, Trans. Am. Math. Soc., 135, 375 (1969).