

УДК 517.512.7+519.21

МАТЕМАТИКА

И. С. КАЦ

СТЕПЕННАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 30 IX 1971)

1. Рассматривается обобщенное дифференциальное выражение

$$l_{MQ}[y](x) = - \frac{d}{dM(x)} \left[y^-(x) - \int_{c-0}^{x-0} y(s) dQ(s) \right], \quad x \in J, \quad (1)$$

где J — интервал вещественной оси, $M(x)$ — неубывающая на нем функция, $Q(x)$ — разность двух неубывающих на J функций, c — какая-либо фиксированная точка из J ; $y^-(x)$ — левая производная функции $y(x)$.

Будем считать в этом пункте $J = [0, L]$ с $L \leq +\infty$ или $J = [0, L]$ с $L < +\infty$. В соответствии с принятой нами в ⁽¹⁾, §§ 1, 7, терминологией левый конец интервала J в этом случае вполне регулярен. В ряде наших работ изучались связи между ростом при $\lambda \rightarrow +\infty$ спектральной функции $\tau(\lambda)$, $-\infty < \lambda < +\infty$, граничной задачи

$$l_{MQ}[y](x) - \lambda y(x) = 0, \quad x \in J, \quad y(0) = m, \quad y^-(0) = n \quad (2)$$

(m, n — вещественные, $m^2 + n^2 \neq 0$, $y^-(0)$ — присоединенное значение*) и поведением функции $M(x)$ в окрестности того конца интервала J , на котором заданы граничные условия. Для простоты формулировок будем считать, что $M(x) > M(0)$ при $x > 0$ и $M(0) = 0$.

Еще в нашей работе ⁽²⁾ в случае $m \neq 0$ было установлено, что, какова бы ни была спектральная функция $\tau(\lambda)$ граничной задачи (2), для сходимости интеграла

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{-\gamma} d\tau(\lambda) \quad (3)$$

достаточно, чтобы сходиллся интеграл

$$\int_0^l \left(\int_0^x M(s) ds \right)^{\gamma-1} dx, \quad 0 < l < L. \quad (4)$$

В той же работе было установлено, что при $m \neq 0$ из непрерывности функции $M(x)$ на некотором интервале $[0, b]$ и условия

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{DM(x)}{(x^a)'} = K \neq 0, \quad a > 0, \quad (5)$$

где $DM(x)$ — какое-либо производное число функции $M(x)$ (отметим, что эти условия влекут абсолютную непрерывность функции $M(x)$ на некото-

* Точные определения, связанные с обобщенным дифференциальным выражением $l_{MQ}[y]$, приведены в ⁽¹⁾, §§ 1, 7. Там же дано (§ 3, п. 1; § 7, п. 1) общее определение спектральной функции граничной задачи (дифференциальной системы) с дифференциальным уравнением $l_{MQ}[y] - \lambda y = 0$, а также (введение) кратко освещена история изучения дифференциального выражения $l_{MQ}[y]$. Эти вопросы при $Q(x) = \text{const}$ освещены также в работе ⁽²⁾. В работах ^(2, 3) вместо $y^-(x)$ и $y^-(0)$ приняты обозначения $y_{-}'(x)$ и $y_{-}'(0)$ соответственно.

ром интервале $[0, b_1]$), вытекает для любой спектральной функции $\tau(\lambda)$ граничной задачи (2) асимптотическое равенство

$$\tau(\lambda) = m^{-2} K^{-1/(\alpha+1)} B(\alpha) \lambda^{-\alpha/(\alpha+1)} + o(\lambda^{\alpha/(\alpha+1)}), \quad \lambda \rightarrow +\infty; \quad (6)$$

$$B(\beta) = \left| \frac{\beta}{(\beta+1)^2} \right|^{\beta/(\beta+1)} \Gamma^{-2} \left(\frac{2\beta+1}{\beta+1} \right) \quad (7)$$

($\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера).

Первый из этих результатов был впоследствии уточнен. Оказалось (см. ⁽⁵⁾), что сходимость интеграла (4) является также необходимым условием сходимости интеграла (3). Затем уже уточненный результат был обобщен (см. ⁽⁶⁾ и ⁽³⁾): в (3) степенная функция $\lambda^{-\gamma}$ была заменена функцией $\eta(\lambda)$ гораздо более широкого класса. Второй результат был также обобщен ^(7, 8).

Между этими двумя результатами даже после их уточнений и обобщений имелась неестественная «брешь»: по интегральной характеристике поведения функции $M(x)$ при $x \downarrow 0$ мы получаем некоторую интегральную характеристику роста функции $\tau(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ (сходимость интеграла (3), когда $\gamma > 0$, равносильна тому, что $\lambda^{-\gamma-1} \tau(\lambda) \in L_1[1, +\infty)$), а для получения весьма грубой степенной асимптотики (6) функции $\tau(\lambda)$ нужно накладывать асимптотическое требование степенного типа уже на поведение производной функции $M(x)$ при $x \downarrow 0$. Эту «брешь» в некотором смысле заполняет основная в этой заметке

Теорема 1. Если в граничной задаче (2)

$$\lim_{x \downarrow 0} M(x) x^{-\alpha} = K \neq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad (8)$$

то при $m \neq 0$ для спектральной функции $\tau(\lambda)$ этой задачи имеет место асимптотическое равенство (6), а при $m = 0$ — равенство

$$\tau(\lambda) = \frac{1}{n^2} K^{1/(\alpha+1)} B \left(\frac{1}{\alpha} \right) \frac{1}{\alpha+2} \lambda^{(\alpha+2)/(\alpha+1)} + o(\lambda^{(\alpha+2)/(\alpha+1)}), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (9)$$

где $B(\beta)$ по-прежнему определяется равенством (7).

В том частном случае, когда $m = 1$, $\alpha = 1$ и $K = 1$, получаем для спектральной функции $\tau(\lambda)$ асимптотику

$$\tau(\lambda) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\bar{\lambda}} + o(\sqrt{\bar{\lambda}}), \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (10)$$

Такая асимптотика была впервые получена В. А. Марченко ⁽⁹⁾ для спектральных функций граничной задачи *.

— $y''(x) + q(x)y(x) - \lambda y(x) = 0$, $0 \leq x < L \leq +\infty$, $y(0) = 1$, $y'(0) = n$, т. е. по существу граничной задачи (2) с $m=1$, абсолютно непрерывными $M(x)$ и $Q(x)$ такими, что $M'(x) \equiv 1$, $Q'(x) = q(x)$ почти всюду. В силу же теоремы 1, для того чтобы имела место асимптотика (10), достаточно (при $m=1$), чтобы была равна единице правая производная функции $M(x)$ в точке $x = 0$, что возможно даже, когда $M(x)$ — функция чистых скачков.

Заметим, что в случае, когда $m \neq 0$ и $\alpha = 1$, а $Q(x)$ — неубывающая функция, теорема 1 получается с помощью тауберовой теоремы Харди и Литтлвуда из одного предложения Маккина и Рэя (⁽¹⁴⁾, равенство 3.3b), однако в доказательстве этого верного, как теперь ясно, предложения в ⁽¹⁴⁾ имеется ошибка. **

2. Обратимся теперь к одной граничной задаче с граничным условием в сингулярном конце. Пусть $J = (-\infty, L)$ с $L \leq +\infty$ или $J = (-\infty, L]$ с $L < +\infty$, $M(x)$ такова, что $x \in L_M^{(1)}(-\infty, l]$, $l < L$, и в окрестности левого конца $x = -\infty$ интервала J имеем $Q(x) = -(v^2 - 1/4)x^{-1} +$

* Остаточный член в асимптотике (10) для спектральной функции этой задачи уточнялся в работах ⁽¹⁰⁻¹³⁾.

** Вопреки утверждаемому авторами выражение 3.8b из ⁽¹⁴⁾ не стремится к нулю при $\alpha \rightarrow +\infty$ (здесь обозначения из ⁽¹⁴⁾), ибо все члены, кроме последнего, в этом выражении стремятся к нулю, а последний к $\sigma(a) \exp(-\sigma(a))$ ($\neq 0$ при $\sigma(a) \neq 0$).

$+Q_1(x)$, $\nu > 0$, а $Q_1(x)$ такова, что $x \in L_{\nu}^{(1)}(-\infty, l]$, где $dV(x) = |dQ_1(x)|$ (при этих условиях и $\nu = 1/2$ в теории марковских процессов конец $x = -\infty$ называют концом-входом). Рассматривается граничная задача

$$l_{MQ}[y](x) - \lambda y(x) = 0, \quad x \in J, \quad \lim_{x \downarrow -\infty} y(x) |x|^{\nu-1/2} = m \neq 0. \quad (11)$$

Теорема 2. Пусть при условиях этого пункта $M(x) |x|^{-\alpha} \rightarrow K > 0$ при $x \downarrow -\infty$, где $\alpha < -1$, но $2\nu/|\alpha + 1|$ отлично от натурального числа, тогда для любой спектральной функции $\tau(\lambda)$ граничной задачи (11) справедливо при $\lambda \rightarrow +\infty$ асимптотическое равенство

$$\tau(\lambda) \sim m^{-2} \left(\frac{K\alpha}{\alpha - 2\nu + 1} \right)^{-\frac{2\nu}{\alpha+1}} (2\nu)^{\frac{2\nu-\alpha-1}{\alpha+1}} B \left(\frac{\alpha - 2\nu + 1}{2\nu} \right) \lambda^{\frac{\alpha-2\nu+1}{\alpha+1}}. \quad (12)$$

3. Пусть теперь $a > -\infty$, $J = (a, L)$ с $L \leq +\infty$ или $J = (a, L]$ с $L < +\infty$ и пусть левый конец интервала J сингулярен (т. е. хотя бы одна из функций $M(x)$ и $Q(x)$ имеет неограниченное изменение в правой окрестности этого конца), но $M(x) \in L_1(a, l)$, $a < l < L$, а $Q(x) = -(v^2 - 1/4)(x - a)^{-1} + Q_0(x)$, где $\nu > 0$ и функция $\hat{Q}_0(x)$, равная при любом $x \in (a, l)$ полной вариации функции $Q_0(x)$ на $[x, l]$, принадлежит $L_1(a, l)$ (при таких условиях и $\nu = 1/2$ конец $x = a$ называют концом-выходом). Рассматривается граничная задача

$$l_{MQ}[y](x) - \lambda y(x) = 0, \quad x \in J, \quad \lim_{x \downarrow a} y(x) (x - a)^{-\nu-1/2} = n \neq 0. \quad (13)$$

Теорема 3. Если при условиях этого пункта $M(x) (x - a)^{-\alpha} \rightarrow K \neq 0$ при $x \downarrow a$, где $\alpha \neq 0$, $\alpha > -1$, но $2\nu/(\alpha + 1)$ отлично от целого числа, большего единицы, то для любой спектральной функции $\tau(\lambda)$ граничной задачи (13) справедливо при $\lambda \rightarrow +\infty$ асимптотическое равенство

$$\tau(\lambda) \sim n^{-2} \left(\frac{\alpha K}{\alpha - 2\nu + 1} \right)^{\frac{2\nu}{\alpha+1}} (2\nu)^{-\frac{2\nu}{\alpha+1}} B \left(\frac{2\nu}{\alpha - 2\nu + 1} \right) \frac{1}{\alpha + 2\nu + 1} \lambda^{\frac{\alpha+2\nu+1}{\alpha+1}}. \quad (14)$$

З а м е ч а н и е. При исключенных в теореме ненулевых значениях $\alpha > -1$ последнюю асимптотику удалось установить лишь при требованиях: $M(x)$ непрерывна на некотором интервале (a, l) , $DM(x)/[(x - a)^{\alpha}]' \rightarrow K$ при $x \downarrow a$. Аналогичное замечание можно сделать к теореме 2.

4. Может случиться, что граничные задачи, рассмотренные в пунктах 1, 2, 3, при введенных там условиях не имеют спектральных функций, так что теоремы 1, 2, 3 описывают в таких случаях поведение пустого множества функций $\tau(\lambda)$.

В наших работах ^(1, 15, 16) полностью исследован вопрос о таком «согласовании» функций $M(x)$ и $Q(x)$, при котором эти граничные задачи имеют спектральные функции (см. ⁽¹⁶⁾, теорема 1 и п. 8). Как явствует из ⁽¹⁵⁾ (теорема 2 и ниже) и ⁽¹⁾ (§ 7, п. 4), при условиях, наложенных на поведение функции $M(x)$, в теоремах 1, 2, 3 для «согласования» достаточно, чтобы всякий раз, когда $M(x_1 - 0) < M(x_1 + 0) = M(x_2 - 0) < M(x_2 + 0)$, $x_1 < x_2$; $x_1, x_2 \in J$, функция $Q(x)$ не убывала на (x_1, x_2) .

В ⁽¹⁶⁾ было введено обобщение понятия спектральной функции граничной задачи с уравнением $l_{MQ}[y] - \lambda y = 0$, а именно, понятие квазиспектральной функции, и было установлено, что граничные задачи (2), (11) и (13) при условиях пунктов 1, 2 и 3 соответственно всегда имеют квазиспектральные функции (⁽¹⁶⁾, теорема 2 и п. 8). В связи с этим важна

Теорема 4. Теоремы 1, 2, 3 остаются справедливыми, если в них слово «спектральной» заменить словом «квазиспектральной».

Отметим еще, что квазиспектральная функция является спектральной в случае «согласования» и только в этом случае (см. ⁽¹⁶⁾, п. 6).

5. Пусть теперь дифференциальное выражение $l_{MQ}[y]$ рассматривается на интервале J , каждый из концов которого либо вполне регулярен, либо

сингулярен, но с сингулярностью такого типа, как на левом конце интервала J в п. 2 или п. 3. Рассмотрим задачу о собственных значениях для дифференциального уравнения $l_{M\varphi}[y](x) - \lambda y(x) = 0$, $x \in J$, с однородным граничным условием на левом конце вида $y(a) \sin \varphi + y'(a) \cos \varphi = 0$, если этот конец вполне регулярен, с требованием ограниченности в окрестности левого конца функции $y(x)|x|^{v-\frac{1}{2}}$ при условиях п. 2 и функции $y(x)(x-a)^{-v-\frac{1}{2}}$ при условиях п. 3; на правом конце условия аналогичны. Такая граничная задача имеет простой дискретный спектр $(-\infty) < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$, причем ряд $\sum \lambda_j^{-1}$, из которого исключено слагаемое с $\lambda_j = 0$, сходится. Через $u_j(x)$ будем обозначать собственную функцию этой задачи, соответствующую λ_j и имеющую единичную норму в пространстве $L_M^2(J)$, $j = 1, 2, 3, \dots$.

Теорема 5. Пусть в некоторой точке $x = x_0$ интервала J при некотором $\alpha > 0$ существуют конечные пределы

$$\lim_{x \downarrow x_0} \frac{M(x) - M(x_0)}{(x - x_0)^\alpha} = K_+, \quad \lim_{x \uparrow x_0} \frac{M(x_0) - M(x)}{(x_0 - x)^\alpha} = K_-,$$

из которых хотя бы один отличен от нуля.

Тогда при условиях и обозначениях этого пункта

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\lambda^{-\alpha/(\alpha+1)} \sum_{\lambda_j < \lambda} |u_j(x_0)|^2 \right) = B(\alpha) (K_+^{1/(\alpha+1)} + K_-^{1/(\alpha+1)})^{-1}, \quad (15)$$

где $B(\beta)$ определено равенством (7).

При $\alpha = 1$ и $K_+ = K_- (= M'(x_0))$ (15) дает классическую асимптотику.

Отметим в заключение, что главная трудность состояла в доказательстве теоремы 1 в случае, когда $Q(x) = \text{const}$, $m = 1$, $n = 0$ (т. е. в обозначениях из (2) для струны S_1). Доказательство остальных результатов опирается на этот.

Одесский технологический институт
пищевой промышленности
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. С. Кац, Матем. сборн., 68 (110), № 2, 174 (1965). ² И. С. Кац, М. Г. Крейн, Доп. II к книге: Ф. Аткинсон, Дискретные и непрерывные граничные задачи, М., 1968. ³ И. С. Кац, Изв. АН СССР, сер. матем., 35, № 1, 154 (1971). ⁴ И. С. Кац, ДАН, 106, № 2, 183 (1956). ⁵ И. С. Кац, Изв. АН СССР, сер. матем., 23, № 2, 257 (1959). ⁶ И. С. Кац, ДАН, 181, № 3, 534 (1968). ⁷ И. С. Кац, ДАН, 122, № 6, 974 (1958). ⁸ И. С. Кац, Изв. АН СССР, сер. матем., 26, № 1, 53 (1962). ⁹ В. А. Марченко, Тр. Московск. матем. общ., 1, 327 (1952). ¹⁰ М. Г. Крейн, ДАН, 89, № 1, 5 (1953). ¹¹ Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., 17, 331 (1953). ¹² Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., 19, № 1, 33 (1955). ¹³ В. А. Марченко, Изв. АН СССР, сер. матем., 19, № 6, 381 (1955). ¹⁴ Н. Р. МакКеан, jr., D. B. Ray, Duke math. J., 29, № 2, 281 (1962). ¹⁵ И. С. Кац, Матем. сборн., 76 (118), № 1, 147 (1968). ¹⁶ И. С. Кац, Матем. сборн., 79 (121), № 3, 368 (1969).