

Г. П. КЛИМОВ

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШАЮЩИЕ ПРАВИЛА
В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ АНАЛИЗЕ

(Представлено академиком А. И. Тихоновым 22 VII 1971)

0. Пусть $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Omega\}$ — семейство вероятностных мер на выборочном (измеримом) пространстве (X, B) . По наблюдению $x \in X$, имеющему распределение из этого семейства, требуется высказать суждение об истинном значении ненаблюдаемого параметра θ . Пусть $\hat{\theta}(x)$ — оценка параметра θ в зависимости от наблюдения x . Будем рассматривать рандомизированные оценки $\hat{\theta}(x)$. Такая оценка задается распределением $\delta(x)$ на пространстве параметров.

Если выбрать в качестве пространства D возможных решений множество всех вероятностных мер на параметрическом (измеримом) пространстве (Ω, F) , то всякое решающее правило $\delta(x): X \rightarrow D$ определяет некоторую рандомизированную оценку $\hat{\theta}(x)$.

Пусть $L(d|\theta)$ — функция потерь при принятии решения $d \in D$, если истинное значение параметра есть θ . $R(\delta|\theta) = E_\theta L(\delta(x)|\theta)$ — функция риска при использовании решающего правила $\delta = \delta(x)$; здесь E — символ математического ожидания.

1. Сделаем следующие предположения.

П1. X и Ω — локально-компактные топологические пространства.

П2. B и F есть σ -алгебры борелевских множеств в X и Ω соответственно.

П3. Локально-компактная группа G действует непрерывно как в X , так и в Ω , и транзитивно в Ω .

П4. Семейство $\mathcal{P}$ регулярных вероятностных мер $P_\theta, \theta \in \Omega$, однородно, т. е. $P_{g\theta}(gE) = P_\theta(E)$ для всех $\theta \in \Omega, g \in G, E \in B$.

П5. Выбирая произвольный элемент $\theta \in \Omega$, получим, что стабилизатор

$$U = U_\theta = \{u \in G: u\theta = \theta\}$$

точки θ относительно G является замкнутой подгруппой группы G . Предполагается, что подгруппа U компактна. (Так как стабилизаторы U_θ , соответствующие разным $\theta \in \Omega$, изоморфны, то достаточно предполагать компактность U_θ для одного θ .)

П6. Выбирая произвольный элемент $x \in X$, получим, что стабилизатор

$$H = H_x = \{h \in G: hx = x\}$$

точки x относительно G является замкнутой подгруппой группы G . Предполагается, что подгруппа H компактна. (Так как стабилизаторы H_x , соответствующие разным x из одной и той же орбиты $Gx = \{gx: g \in G\}$, изоморфны, то достаточно предполагать компактность H_x для одного элемента из каждой орбиты.)

2. Сделаем теперь предположения относительно функции потерь. Пусть α и β есть вероятностные меры на (Ω, F) , т. е. элементы из D . Положим $L(\beta|\alpha) = \int_\Omega L(\beta|\theta) d\alpha(\theta)$.

117. $L(\beta|\alpha) \geq L(\alpha|\alpha)$ для всех α и $\beta \in D$. Такие функции потерь будем называть несмещенными, а если знак равенства выполняется лишь при $\alpha = \beta$, то строго несмещенными.

Определим теперь действие группы G на множество D возможных решений. Для $\alpha \in D$ и $g \in G$ определим $g\alpha \in D$, положив $(g\alpha)(E) = \alpha(g^{-1}E)$ для всех $E \in F$, или символически $g\alpha = \alpha g^{-1}$, или $g^{-1}\alpha = \alpha g$.

118. $L(g\alpha|g\theta) = L(\alpha|\theta)$ для всех $\alpha \in D$, $\theta \in \Omega$, $g \in G$. Такие функции потерь будем называть инвариантными (относительно группы G).

Наконец, обозначим через Δ множество всех решающих правил $\delta = \delta(x)$, т. е. измеримых отображений X в D (топология в D определяется естественным образом, исходя из топологии в G и действия G в D). Через Δ_0 обозначим множество всех инвариантных решающих правил. При этом решающее правило $\delta = \delta(x)$ называется инвариантным (относительно преобразований из G), если $\delta(gx) = g\delta(x)$ для всех $x \in X$ и $g \in G$.

3. При сделанных выше предположениях верна

Теорема 1. Существует $\delta^* \in \Delta_0$ такое, что

$$R(\delta|\theta) \geq R(\delta^*|\theta) \text{ для всех } \theta \in \Omega \text{ и } \delta \in \Delta_0;$$

при этом δ^* не зависит от функции потерь L и в качестве $\delta^*(x)$ можно выбрать фидуциальное распределение, см ⁽⁴⁻⁷⁾. Если функция потерь строго несмещенная, то такое δ^* единственно.

Доказательство. Будем пользоваться обозначениями, используемыми в ⁽⁴⁻⁷⁾. Рассмотрим сначала случай, когда группа G действует в X транзитивно. Воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned} dP_\theta(x) &= q\theta^{-1}x \Delta(\theta) dv(x) = q(\theta^{-1}x) dv(\theta^{-1}x); \\ dP_x^*(\theta) &= q^*(x^{-1}\theta) dv(x^{-1}\theta) = q(\theta^{-1}x) dv(\theta^{-1}x); \\ L(\delta(x)|\theta) &= L(g_\theta^{-1}\delta(v)|\theta_0) = L(\delta(g_\theta^{-1}x)|\theta_0) = L_\delta(\theta^{-1}x) \end{aligned}$$

для $\delta \in \Delta_0$. Последнее равенство служит определением $L_\delta(\theta^{-1}x)$. Это определение корректно, так как для всякого $u \in U_{\theta_0}$

$$L(\delta(ug_\theta^{-1}x)|\theta_0) = L(u\delta(g_\theta^{-1}x)|u\theta_0) = L(\delta(g_\theta^{-1}x)|\theta_0).$$

Из приведенных равенств следует, что

$$R(\delta|\theta) = \int_X L(\delta(x)|\theta) dP_\theta(v) = \int_\Omega L(\delta(x)|\theta) dP_x^*(\theta),$$

откуда, в частности, следует, что $R(\delta|\theta)$ при $\delta \in \Delta_0$ не зависит от θ . Таким образом, обозначая $\delta^*(x) = P_x^*$, имеем

$$R(\delta|\theta) = L(\delta(x)|\delta^*(x)) \geq L(\delta^*(x)|\delta^*(x)) = R(\delta^*|\theta),$$

что и требовалось доказать. Если же теперь группа G действует в X не транзитивно, то беря фидуциальное распределение на каждой орбите точек из X по G (что и является определением фидуциального распределения в общем случае) и учитывая, что статистика $G(x) = Gx$ (принимая значения во множестве орбит) имеет распределение, не зависящее от параметра θ , получаем утверждение теоремы и в этом случае.

4. Теперь рассмотрим инвариантные решающие правила в задачах последовательного анализа. Производятся наблюдения над случайными величинами $x_1, x_2, \dots$, принимающими значения в выборочных пространствах $X_1, X_2, \dots$. Для каждого целого $n \geq 1$ случайная величина $x^{(n)} = (x_1, \dots, x_n)$ со значениями в $X^{(n)} = X_1 \times \dots \times X_n$ имеет распределение из семейства $\mathcal{P}^{(n)} = \{P_\theta^{(n)}, \theta \in \Omega\}$ с одним и тем же значением параметра $\theta \in \Omega$. Если мы произвели n испытаний и вынесли относительно параметра θ решение $\alpha \in D$, то мы несем потери, равные $L_n(\alpha|\theta)$, когда истинное

значение параметра равно θ . Последовательный критерий S есть правило, позволяющее определить момент остановки испытаний по результатам испытаний и после остановки определить решение из D . Всякий критерий S может быть задан последовательностью функций $\{(\varphi_n, \delta_n)\}$, где функции φ_n и δ_n определены на $X^{(n)}$ со значениями в $[0, 1]$ и D соответственно и имеют следующий смысл. Если мы произвели n испытаний с результатом $(x_1, \dots, x_n) = x^{(n)}$, то с вероятностью $\varphi_n(x^{(n)})$ прекращаем испытания и выбираем решение $\delta_n(x^{(n)}) \in D$; с вероятностью же $1 - \varphi_n(x^{(n)})$ производим следующее испытание. Мы будем писать $S = \{(\varphi_n, \delta_n)\}$. Для последовательного критерия S функция риска равна

$$R(S|\theta) = E_\theta L_n(\delta_n(x^{(n)})|\theta),$$

где n — случайная величина, равная моменту остановки испытаний.

5. Пусть для каждого целого $n \geq 1$ выполнены предположения П1 — П8, если $X, B, \mathcal{P}, P, L$ заменить соответственно на $X^{(n)}, B^{(n)}, \mathcal{P}^{(n)}, P^{(n)}, L_n$. Критерий $S = \{(\varphi_n, \delta_n)\}$ назовем инвариантным относительно группы преобразований из G , если $\varphi_n(gx) = \varphi_n(x)$ и $\delta_n(gx) = g\delta_n(x)$ для всех $x \in X^{(n)}$. Множество инвариантных последовательных критериев будем обозначать по-прежнему через Δ_0 .

6. В этих предположениях справедлива

Теорема 2. *Существует $S^* = \{(\varphi_n^*, \delta_n^*)\} \in \Delta_0$ такой, что*

$$R(S|\theta) \geq R(S^*|\theta) \text{ для всех } \theta \in \Omega, S \in \Delta_0;$$

при этом $\delta_n^*, n \geq 1$, не зависит от всех функций потерь $L_n, n \geq 1$, и в качестве $\delta_n^*(x^{(n)})$ можно выбрать фидуциальное распределение. Если функция потерь L_n строго несмещенная, то такое δ_n^* единственно.

Доказательство следует из представления

$$R(S|\theta) = \sum_{n \geq 1} \int [1 - \varphi_1(x^{(1)})] \dots \\ \dots [1 - \varphi_{n-1}(x^{(n-1)})] \varphi_n(x^{(n)}) L_n(\delta_n(x^{(n)})|\theta) dP_\theta^{(n)}(x^{(n)})$$

с помощью приема перехода к фидуциальному распределению, используемого при доказательстве теоремы 1. Следует лишь учесть, что подынтегральная функция без учета множителя L_n инвариантна относительно преобразований из G , а поэтому есть функция от максимального инварианта и, в частности, инварианта $G(x) = Gx$, а распределение максимального инварианта не зависит от $\theta \in \Omega$.

7. Теорема 2 определяет решение относительно истинного значения параметра θ в момент остановки. Именно, в момент остановки в качестве рандомизированной оценки следует взять оценку, определяемую фидуциальным распределением. Но эта теорема не говорит, как определить момент остановки. Следующая теорема 3 восполняет этот пробел для одного частного случая семейств $\mathcal{P}$. Для этого введем еще одно предположение.

П9. Пусть $t = t(x)$ есть достаточная статистика для $\mathcal{P}^{(n)}$ и семейство $\mathcal{P}^{\omega_t}$ распределений статистики $t_n = t_n(x^{(n)})$, соответствующих разным $\theta \in \Omega$, ограничено полно. Это означает, что для всякой измеримой ограниченной функции $\psi = \psi(t)$ условие

$$E_P \psi(t_n) = 0 \text{ для всех } P \in \mathcal{P}$$

влечет $\psi(t_n) = 0$ $\mathcal{P}$ -почти всюду (последнее означает, что $\psi(t) \neq 0$ лишь на множестве N с $P(N) = 0$ для всех $P \in \mathcal{P}$). Относительно этих понятий см. (1-3).

Теорема 3. *Если выполнены предположения П1 — П9, то оптимальный последовательный критерий $S^* \in \Delta_0$ состоит в выполнении фиксиро-*

ванного числа N испытаний. Число N определяется из следующих соотношений:

$$R_n = E_0 L_n(\delta_n^*(x^{(n)}) | \theta), \quad n \geq 1; \quad R_N = \min_{n \geq 1} \{R_n\}.$$

Здесь предполагается, что минимум достигается. Отметим, что R_n , $n \geq 1$, не зависит от θ .

Доказательство. Пусть $S = \{(\varphi_n, \delta_n^*)\} \in \Delta_0$, тогда

$$R(S | \theta) = \sum_{n \geq 1} p_n R_n,$$

где p_n есть вероятность того, что момент остановки испытаний есть n (предполагается, что хоть одно испытание производится). Это равенство следует из того, что φ_n зависит от $x^{(n)}$ лишь через максимальный инвариант, который независим, в силу предположения П9, от достаточной статистики $t_n(x^{(n)})$. Кроме того, фидуциальное распределение $\delta_n^*(x^{(n)})$ зависит от $x^{(n)}$ лишь через достаточную статистику $t_n = t_n(x^{(n)})$. Остается найти минимум указанной суммы по $p_1, p_2, \dots$ с ограничениями $p_n \geq 0$, $\sum p_n = 1$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
7 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Э. Леман, Проверка статистических гипотез, «Наука», 1964. ² Ю. В. Линник, Статистические задачи с мешающими параметрами, «Наука», 1966. ³ D. Basu, Sankhya, 20 (1958). ⁴ Г. П. Климов, Фидуциальный подход в статистике, М., 1970. ⁵ Г. П. Климов, ДАН, 196, № 5 (1971). ⁶ Г. П. Климов, А. Д. Кузьмин, ДАН, 196, № 6 (1971). ⁷ Г. П. Климов, А. Д. Кузьмин, ДАН, 198, № 5 (1971).

198/77

