Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 3

УДК 550.311 **ГЕОФИЗИКА**

С. Ц. АКОПЯН, В. Н. ЖАРКОВ, В. М. ЛЮБИМОВ

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗЕМЛИ. ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

(Представлено академиком М. А. Садовским 7 VII 1971)

1. Теория возмущений является основным теоретическим инструментом при исследованиях собственных колебаний Земли. Она решает две задачи: 1) по расхождению теоретических и экспериментальных значений частот улучшить модель Земли, 2) по затуханию собственных колебаний определить распределение диссипативной функции $Q(l)$, l — глубина. В настоящее время построена теория возмущений в первом приближении ([1, 2]). Во втором приближении теория возмущений позволяет определить область применимости линейных соотношений между изменениями частот и небольшими приращениями материальных параметров, изменение форм колебаний в первом и втором приближении, влияние затухания на величины собственных частот. Ниже рассматривается теория возмущений для крутильных колебаний во втором приближении.

2. В простейшем случае однородной сферы $\rho = \bar{\rho} = \mathrm{const}$, $\mu = \bar{\mu} = \mathrm{const}$, безразмерная частота равна $\varkappa = wa / c_{s0}$, $c_{s0}^2 = \bar{\mu} / \bar{\rho}$, a — радиус Земли, ω — рассматриваемая собственная частота, ρ — плотность, μ — модуль сдвига. Частота $\varkappa$ определяется как корень характеристического уравнения ([3])

$$\varkappa j_{n-1/2}(\varkappa) = (n+2) j_{n+1/2}(\varkappa), \tag{1}$$

где $j_{n+1/2}$ и $j_{n-1/2}$ — функции Бесселя полуцелого индекса, n — номер колебания. Зададим параметрам $\bar{\rho}$ и $\bar{\mu}$ слабые возмущения $\bar{\rho} \to \bar{\rho}_0(1+\overline{R})$, $\bar{\mu} \to \bar{\mu}_0(1+\overline{M})$. Тогда частота ω также изменится $\omega \to \omega_0(1+\Omega_1+\Omega_2)$, Ω_1 и Ω_2 — величины первого и второго порядка малости соответственно.

Решение задачи сразу следует из того, что корень (1) сохраняет свое значение и при наличии возмущений. Тогда

$$\Omega_1 = {}^1/_2(\overline{M} - \overline{R}), \quad \Omega_2 = {}^1/_8(3\overline{R}^2 - 2\overline{M}\overline{R} - \overline{M}^2). \tag{2}$$

3. В общем случае, в сферической системе координат (r, ϑ, φ) компоненты вектора смещений $\mathbf{u}(u, v, w)$ имеют вид

$$u = 0, \quad v = \frac{V(r)}{\sin\vartheta}\frac{\partial S_n^m(\vartheta, \varphi)}{\partial\varphi}, \quad w = -V(r)\frac{\partial S_n^m(\vartheta, \varphi)}{\partial\vartheta}, \tag{3}$$

где S_n^m — поверхностная сферическая гармоника. Функция $V(r)$ удовлетворяет уравнению ([3])

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dr}\left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right) + \left[\frac{\omega^2\rho}{\mu} - \frac{n(n+1)}{r^2}\right]V = 0. \tag{4}$$

Здесь μ и ρ — кусочно-гладкие функции, V — непрерывная функция. Индексы (n, m) у ω и V, где это не вызывает сомнений, мы и в дальнейшем будем опускать.

При конкретных расчетах с помощью подстановки

$$y_1 = V, \quad y_2 = \mu(dV/dr - V/r) \tag{5}$$

уравнение (4) удобно заменить парой уравнений первого порядка

$$\frac{dy_1}{dr} = \frac{1}{r} y_1 + \frac{1}{\mu} y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dr} = \left[\frac{n^2+n-2}{r^2}\mu - \omega^2\rho\right] y_1 - \frac{3}{r} y_2, \tag{6}$$

где y_2 — радиальный множитель в компонентах сдвиговых напряжений $\sigma_{r\varphi}$ и $\sigma_{r,\vartheta}$.

Граничные условия для целиком твердой планеты

$$y_2 = 0 \text{ при } r = a, \quad y_1 = 0 \text{ при } r = 0. \tag{7}$$

В случае твердой оболочки, граничащей с жидким ядром при $r = b$, граничные условия принимают вид

$$y_2 = 0 \text{ при } r = a, \quad \text{при } r = b. \tag{8}$$

Легко доказать ортогональность функций $V(r)$ для граничных условий (7) или (8). Для этого стандартным образом образуем билинейные комбинации на основе (4) для l-й и k-й частот. Тогда

$$(\omega_k^2 - \omega_l^2)\int_0^a \rho V_l V_k r^2 dr = \int_0^a \left\{ V_k \left[\mu \frac{d^2V_l}{dr^2} + \frac{2}{r}\mu\frac{dV_l}{dr} + \frac{d\mu}{dr}\left(\frac{dV_l}{dr} - \frac{V_l}{r}\right) - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{n(n+1)}{r^2}\mu V_l\right] - V_l \left[\mu \frac{d^2V_k}{dr^2} + \frac{2}{r}\mu\frac{dV_k}{dr} + \frac{d\mu}{dr}\left(\frac{dV_k}{dr} - \frac{V_k}{r}\right] - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{n(n+1)}{r^2}\mu V_k\right]\right\} r^2 dr. \tag{9}$$

Интегрируя по частям и учитывая, что y_1 и y_2 — непрерывные функции, легко показать, что правая часть в (9) равна нулю. Следовательно,

$$\int_0^a \rho V_l V_k r^2 dr = J_l \delta_{lk}, \tag{10}$$

где δ_{lk} — дельта-символ Кронекера, а J_l положим равным единице, считая формы V_l нормированными с весовой функцией $\rho(r)$. В случае граничного условия (8) интегрировать в (10) следует от b до a.

Введем безразмерные переменные

$$\xi = r/a, \quad x = 1 - \xi, \quad \rho_0 = \rho^0/\bar{\rho}, \quad \mu_0 = \mu^0/\bar{\mu}, \quad \bar{c}_s^2 = \bar{\mu}/\bar{\rho}, \quad k^2 = \frac{\omega^2 a^2}{\bar{c}_s^2},$$
$$z_1(\xi) = V(\xi)/a, \quad z_2(\xi) = \mu(\xi)(dV/dr - V/r) \tag{11}$$

и сделаем замену ([1])

$$u = z_1/(1-x), \quad v = z_2(1-x)^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant c = (a-b)/a. \tag{12}$$

Функции u и v так же, как и z_1 и z_2, непрерывны и удобны тем, что удовлетворяют более простой системе дифференциальных уравнений первого порядка ([1]). Для них граничные условия (8) примут вид

$$v(0) = v(c) = 0 \tag{8'}$$

и, кроме того ([1]),

$$v = -(1-x)^4 \mu\, du/dx,$$
$$-\frac{d}{dx}\left[(1-x)^4 \mu \frac{du}{dx}\right] = (1-x)^4 \left[k^2\rho - \frac{n^2+n-2}{(1-x)^2}\mu\right] u, \tag{13}$$
$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=c} = 0.$$

Условие ортогональности (10) в новых переменных при $J_l = 1$ будет

$$\int_0^c (1-x)^4 \rho(x) u_j u_k dx = \delta_{jk}. \tag{10'}$$

Зададим возмущения безразмерным функциям $\rho(x)$ и $\mu(x)$:

$$\rho(x) = \rho_0(x)[1 + \varepsilon R(x)], \quad \mu(x) = \mu_0(x)[1 + \varepsilon M(x)], \tag{14}$$

где ε — обозначает «параметр возмущения». Будем строить теорию возмущений граничной задачи (13) по методу, изложенному в ([4]).

Разложим частоту k и функцию u по ε:

$$k_l = k_{l0}(1 + \varepsilon k_{l1} + \varepsilon^2 k_{l2} + \ldots), \quad u_l = u_{0l} + \varepsilon u_{1l} + \varepsilon^2 u_{2l} + \cdots \tag{15}$$

Подставим (14) и (15) в (13) и приравняем члены при одинаковых степенях ε. Тогда мы получим соответственно уравнения для u_{0l}, u_{1l}, u_{2l}:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^4 \mu_0 \frac{du_0}{dx}\right] = \left[\frac{n^2+n-2}{(1-x)^2}\mu_0 - k_0^2\rho_0\right] u_0 (1-x)^4; \tag{I}$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^4 \mu_0 \left(\frac{du_1}{dx} + M\frac{du_0}{dx}\right)\right] = \left[\frac{n^2+n-2}{(1-x)^2}\mu_0 (u_1 + Mu_0) - \right.$$
$$\left. - k_0^2\rho_0(u_1 + Ru_0 + 2k_1u_0)\right](1-x)^4; \tag{II}$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^4 \mu_0 \left(\frac{du_2}{dx} + M\frac{du_1}{dx}\right)\right] = \left[\frac{n^2+n-2}{(1-x)^2}\mu_0 (u_2 + Mu_1) - \right.$$
$$\left. - k_0^2\rho_0(u_2 + Ru_1 + 2k_1u_1 + 2k_1Ru_0 + k_1^2u_0 + 2k_2u_0\right](1-x)^4. \tag{III}$$

(Здесь индекс l опущен.) В (I) — (III) слева под знаком производной стоят непрерывные функции (в соответствующем приближении). Для получения формул первого приближения используем уравнения (I) и (II). Разложим функции u_{1l} по собственным функциям нулевого приближения

$$u_{1l} = \sum_j a_{lj}u_{0j}. \tag{16}$$

Умножим уравнение (I) с индексом j на u_{1l}, а (II) с индексом l на u_{0j}, образуем разность и проинтегрируем в пределах от 0 до c. После интегрирования по частям с использованием граничных условий, подстановки (16) с учетом ортогональности, найдем

$$(k_{0j}^2 - k_{0l}^2)a_{lj} - 2k_1k_{0l}^2\delta_{jl} + \int_0^c (1-x)^4 \mu_0 M\left[\frac{n^2+n-2}{(1-x)^2}u_{0l}u_{0j} + \frac{du_{0l}}{dx}\frac{du_{0j}}{dx}\right]dx -$$
$$- k_{0l}^2\int_0^c (1-x)^4\rho_0 R u_{0l}u_{0j}\,dx = 0. \tag{17}$$

При $l = j$ имеем

$$k_1 = \frac{1}{2k_0^2}\int_0^c (1-x)^4\left[\left(\frac{du_0}{dx}\right)^2 + \frac{n^2+n-2}{(1-x)^2}u_0^2\right]\mu_0 M\,dx - \frac{1}{2}\int_0^c (1-x)^4 u_0^2\rho_0 R\,dx. \tag{18}$$

При $l \neq j$ получаем

$$a_{lj} = \frac{1}{k_{0l}^2 - k_{0j}^2}\left\{\int_0^c (1-x)^4\left[\frac{n^2+n-2}{(1-x)^2}u_{0l}u_{0j} + \frac{du_{0l}}{dx}\frac{du_{0j}}{dx}\right]\mu_0 M\,dx - \right.$$
$$\left. - k_{0l}^2\int_0^c (1-x)^4 u_{0l}u_{0j}\rho_0 R\,dx\right\}. \tag{19}$$

Коэффициент a_{ll} оказывается неопределенным. Мы его определим так, чтобы условие нормировки (10′) выполнялось с точностью до членов первого порядка. Тогда

$$a_{ll} = -\frac{1}{2}\int_0^c (1-x)^4 u_{0l}^2\rho_0 R\,dx. \tag{20}$$

Теория возмущений во втором приближении строится совершенно аналогичным образом. Раскладываем u_{2l} по функциям u_{0k}:

$$u_{2l} = \sum_k b_{lk}u_{0k}. \tag{21}$$

Затем, проделав с уравнениями (I) и (III) те же преобразования, что и при получении (17), найдем

$$(k_{0j}^2 - k_{0l}^2) b_{lj} - k_1^2 k_{0l}^2 \delta_{lj} - 2k_2 k_{0l}^2 \delta_{lj} - 2k_1 k_{0l}^2 a_{lj} - 2k_1 k_{0l}^2 \int_0^c (1-x)^4 u_{0l} u_{0j} \rho_0 R\, dx +$$

$$+ \sum_k a_{lk} \left\{ \int_0^c \left[\frac{n^2+n-2}{(1-x)^2} u_{0k} u_{0j} + \frac{du_{0k}}{dx} \frac{du_{0j}}{dx} \right] \mu_0 M (1-x)^4 dx - \right.$$

$$\left. - k_{0l}^2 \int_0^c (1-x)^4 u_{0k} u_{0j} \rho_0 R\, dx \right\} = 0. \tag{22}$$

Полагая $l = j$, определим изменение частоты во втором приближении:

$$k_2 = -\frac{1}{2} k_1^2 + k_1 a_{ll} + \sum_k a_{lk} \left\{ \frac{1}{2k_{0l}^2} \int_0^c \left[\frac{n^2+n-2}{(1-x)^2} u_{0k} u_{0l} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{du_{0k}}{dx} \frac{du_{0l}}{dx} \right] \mu_0 M (1-x)^4 dx - \frac{1}{2} \int_0^c (1-x)^4 u_{0k} u_{0l} \rho_0 R\, dx \right\}. \tag{23}$$

При $l \neq j$ из (22) найдем все b_{lj}, исключая b_{ll}:

$$b_{lj} = \frac{1}{k_{0j}^2 - k_{0l}^2} \left\{ 2k_1 k_{0l}^2 a_{lj} + 2k_1 k_{0l}^2 \int_0^c (1-x)^4 u_{0l} u_{0j} \rho_0 R\, dx - \right.$$

$$- \sum_k a_{lk} \left[\int_0^c \left(\frac{n^2+n-2}{(1-x)^2} u_{0k} u_{0j} + \frac{du_{0k}}{dx} \frac{du_{0j}}{dx} \right) \mu_0 M (1-x)^4 dx - \right.$$

$$\left.\left. - k_{0l}^2 \int_0^c (1-x)^4 u_{0k} u_{0j} \rho_0 R\, dx \right] \right\}. \tag{24}$$

Коэффициент b_{ll} определим из условия сохранения нормировки (10′) с точностью до членов второго порядка:

$$b_{ll} = -\frac{1}{2} \left\{ \sum_k a_{lk}^2 + \sum_k a_{lk} \int_0^c (1-x)^4 u_{0l} u_{0k} \rho_0 R\, dx \right\}. \tag{25}$$

В простейшем случае однородной сферы, как и должно быть, (18) и (23) переходят в формулу (2). При выводе всех соотношений считалось, что M и R принадлежат к тому же классу функций, что и μ_0 и ρ_0. Чтобы избежать почленного дифференцирования рядов (16) и (21), мы везде освобождались от производных путем предварительного интегрирования по частям. Формула первого приближения (18) была получена нами ранее другим методом при более общих предположениях ([1]). Остальные формулы (16), (19), (20), (23), (24), (25) являются новыми.

Отличие развитой здесь теории возмущений от используемой в квантовой механике ([5]) состоит в том, что коэффициенты a_{ll} и b_{ll} оказываются не равными нулю. Это связано с тем, что в условия нормировки (10) или (10′) входит весовая функция $\rho(x)$, которая сама подвергается возмущению.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
30 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Н. Жарков, В. М. Любимов и др., В кн. Земные приливы и внутреннее строение Земли, М., 1967. [2] В. Н. Жарков, В. М. Любимов, А. И. Оснач, Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, № 10 (1968). [3] В. Н. Жарков, В. Л. Паньков и др., Введение в физику Луны, гл. 7, «Наука», 1969. [4] Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, М.—Л., 1933. [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, М., 1963.