Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 3

УДК 517.948.32 : 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. А. БАБЕШКО

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ СВЕРТОК И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 3 IX 1971)

1. В работе рассматривается уравнение типа свертки вида

$$\iint\limits_S k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}, \frac{y-\eta}{\lambda}\right) q(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 4\pi^2 f(x, y), \quad x, y \in S,$$

$$k(x, y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} K(u)\, e^{i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \quad u = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}. \tag{1}$$

1. Считаем, что множество S, на котором задается функция $f(x, y)$, представляет систему областей S_k, границы которых σ_k имеют бесконечно дифференцируемую кривизну. Для описания условий на области построим нормаль в произвольной граничной точке некоторой области, которая может пересечься границей данной же области или же границами соседних областей. Исходная точка и точка пересечения образуют отрезок нормали. Будем считать, что система S_k областей такова, что отрезки нормалей, построенные в произвольных точках границы, и радиусы кривизн границ ограничены снизу некоторым фиксированным числом ω. Исследуются свойства решений уравнения (1) при $\lambda \to 0$.

Ниже приводится асимптотическое решение уравнения (1) в форме, удобной для применения методов работы [1].

2. Простоты ради, будем считать, что функция $f(x, y)$ бесконечно дифференцируема по обеим переменным на множестве S и, если это множество уходит в бесконечность, то $f(x, y)$ на бесконечности обращается в нуль со всеми производными.

В этом случае нетрудно построить представление функции $f(x, y)$ вида

$$f(x, y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x+\beta y)} d\alpha\, d\beta, \quad x, y \in S, \tag{2}$$

в котором функция $F(\alpha, \beta)$ убывает на бесконечности быстрее любой степени.

В этих условиях для асимптотического решения уравнения (1) справедливо представление

$$\lambda^2 q_k(x, y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\alpha, \beta)}{K(\lambda u)} e^{i(\alpha x+\beta y)} d\alpha\, d\beta + \frac{1}{4\pi i} \iint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\Gamma} \left[\frac{i}{u}\left(\frac{1}{K_+(\lambda u)(z+\lambda u)} - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{1}{K_-(\lambda u)(z-\lambda u)}\right) w_{k,1}(x, y, \theta) - \left(\frac{1}{K_+(\lambda u)(z+\lambda u)} + \frac{1}{K_-(\lambda u)(z-\lambda u)}\right) \times \tag{3}$$
$$\left. \times\, w_{k,0}(x, y, \theta)\right] \frac{F(\alpha, \beta)}{K_+(z)} dz\, d\alpha\, d\beta + O\left(\frac{\lambda}{\omega\mu_\Gamma}\right), \quad \theta = \frac{iz}{\lambda}, \quad x, y \in S_k.$$

Здесь $w_{k,m}(x, y, \theta)$, $m = 0, 1$, есть решения краевых задач

$$\Delta w_{k,m} - \theta^2 w_{k,m} = 0, \quad x, y \in S_k; \quad w_{k,m} = f_{k,m}(x, y), \quad x, y \in \sigma_k; \tag{4}$$

$$f_{k,0}(x, y) = \exp i(\alpha x + \beta y), \quad f_{k,1}(x, y) = d/dn \exp i(\alpha x + \beta y). \qquad (5)$$

n — внутренняя к контуру σ_k нормаль.

Отметим, что приближенные решения $w_{k,m}(x, y, \theta)$ на каждом шагу итерационного процесса ([1]) будут приобретать члены, пропорциональные α и β. Однако поведение функции $F(\alpha, \beta)$ на бесконечности обеспечивает равномерную сходимость интегралов в соотношении (3) при $x, y \in S_k$.

В случае, если кривизны границ σ_k и функция $f(x, y)$ имеют лишь конечное число производных, при использовании итерационного процесса ([1]) допускается лишь конечное число шагов.

В контактных задачах теории упругости о вдавливании в слой гладких жестких штампов ([2-4]) приходится по заданной функции $f(x, y)$ определять области контактов. Границы областей контактов определяются из соотношений

$$q_k(x, y) = 0, \quad x, y \in \sigma_k, \qquad (6)$$

причем с одной из сторон границы σ_k должно быть $q_k(x, y) \neq 0$.

В данном случае, в рамках асимптотического приближения, уравнения границ σ_k имеют вид

$$f_3 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = 0. \qquad (7)$$

Если только найденные из соотношения (7) кривые σ_k ограничивают области S_k, удовлетворяющие условиям п.1 настоящей работы, то асимптотические решения уравнения (1) даются формулой (3).

3. В качестве примера рассмотрим задачу о поступательном вдавливании в упругий слой толщины h штампа, имеющего форму эллиптического параболоида, описываемого уравнением $z = x^2a^{-2} + y^2b^{-2}$, $b > a > 0$. Интегральное уравнение задачи имеет вид (1), в котором приняты обозначения ([5]):

$$\sigma_z(x, y) = 0{,}5G(1-\nu)^{-1}\lambda^2 q(x/a\sqrt{h},\ y/a\sqrt{h}),$$
$$\lambda = \sqrt{h}/a, \quad c = \delta/h, \quad a^2/b^2 = \varepsilon \leqslant 1. \qquad (8)$$

Здесь σ_z — контактные напряжения, G, ν — соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала слоя, δ — вертикальное перемещение штампа.

В этом случае $F(\alpha, \beta) = c\delta(\alpha, \beta) + \delta_\alpha''(\alpha, \beta) + \varepsilon\delta_\beta''(\alpha, \beta)$, $\delta(\alpha, \beta)$ — двумерная дельта-функция Дирака.

Ради простоты получим приближенное решение интегрального уравнения, аппроксимировав функцию $K(u)$ выражением $(u^2 + T^2)^{-0,5}$, $T = 2$, или 2.45 из ([6]). В этом случае уравнение границы (7) площадки контакта в безразмерных переменных имеет вид

$$c - x^2 - \varepsilon y^2 - \lambda T^{-1}\sqrt{x^2 + \varepsilon^2 y^2} + 0{,}25\lambda^2(1+\varepsilon)T^{-2} = 0. \qquad (9)$$

При $\lambda < 1$ ограниченная этим контуром площадка меньше по площади, чем ограниченная эллипсом

$$c - x^2 - \varepsilon y^2 = 0. \qquad (10)$$

Напряжения в области контакта имеют вид

$$\begin{aligned}\lambda^2 q(x, y) = {} & T\,[c + \lambda^2(1+\varepsilon)T^{-2} - x^2 - \varepsilon y^2] + (1 - 0{,}5\varkappa n)\,[c - x^2 - \\ & - \varepsilon y^2 + \lambda^2(1+\varepsilon)\cdot 0{,}25T^{-2} - \lambda T^{-1}\sqrt{x^2+\varepsilon^2y^2}]\,[T(\operatorname{erf}\sqrt{Tv} - 1) - \\ & - \sqrt{T}e^{-Tv}(\pi v)^{-0{,}5}] + 2\lambda(1 - 0{,}5\varkappa n)\sqrt{x^2+\varepsilon^2y^2}(\operatorname{erf}\sqrt{Tv} - 1)(0{,}5 + Tv) + \\ & + \lambda^2(1 - 0{,}5\varkappa n)\,[(0{,}75T^{-1} - Tv^2)(\operatorname{erf}\sqrt{Tv} - 1) + \\ & + \sqrt{Tv/\pi}\,(0{,}5T^{-1} - v)e^{-Tv}], \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx, \quad v = \frac{n}{\lambda}.\end{aligned} \qquad (11)$$

Здесь $\varkappa$ — кривизна кривой ([1]).

На границе области контакта функция $q(x, y)$, даваемая соотношением (11), имеет значение

$$\lambda^2 q(x, y) = 0{,}75\lambda^2 \varepsilon T^{-1}. \tag{12}$$

При $\lambda \to 0$ правая часть, очевидно, исчезает.

Связь между вертикальной центральной силой P, действующей на штамп, и осадкой δ штампа находится из соотношения

$$P = \iint\limits_{\Omega} \sigma_z(x, y)\, dx\, dy, \tag{13}$$

Ω — область S в размерных переменных.

Можно получить приближенное аналитическое значение интеграла и найти связь $\delta = \delta(P)$. Однако эта формула громоздка и здесь не приводится.

Случай непоступательного внедрения штампа ([3]), т. е. когда он нагружен и моментом, может быть приведен параллельным переносом координат к рассмотренному случаю поступательного внедрения.

Отметим, что при $\varepsilon = 1$, эллиптический параболоид превращается в круговой и кривая (9) дает окружность. При $\varepsilon = 0$ параболоид вырождается в параболический цилиндр с образующей, параллельной оси Oy, и кривая (9) превращается в две прямые, симметричные относительно оси Oy и параллельные ей.

Результаты настоящей работы могут быть применены к решению ряда смешанных динамических задач для вязко-упругого слоя. Метод эффективен при большой вязкости материала.

Автор выражает благодарность И. И. Воровичу за внимание к работе и советы.

Ростовский
государственный университет

Поступило
26 VIII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, УМН, 12, в. 5 (1957). [2] Л. А. Галин, Контактные задачи теории упругости, М., 1953. [3] А. И. Лурье, Теория упругости, «Наука», 1970. [4] И. Я. Штаерман, Контактная задача теории упругости, М., 1949. [5] В. М. Александров, И. И. Ворович, ПММ, 24, в. 2 (1960). [6] В. М. Александров, В. А. Бабешко, Изв. АН СССР, Механика, в. 2, 95 (1965).