Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 3

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

С. БОГАТЫЙ

О МЕТРИЧЕСКИХ РЕТРАКТАХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 21 IX 1971)

Б. Т. Левшенко и Ю. М. Смирнов ([1]), ([2]) поставили и решили в классе метрических пространств задачу характеризации размерности дополнительного множества $X \setminus A$ возможностью ретрагирования на замкнутое множество A. В работе ([1]) показано, что задача не имеет разумного решения в классе пространств, отличном от метрических, но, оказывается, что частично ее можно решить в более широких предположениях (теорема 1).

1. Определение 1. Отображение $f\colon A \to Y$ назовем отображением типа G_δ с множеством B, если $B \supseteq A$, где B замкнуто, имеет тип G_δ в X и отображение f продолжаемо до отображения $\hat{f}\colon B \to Y$.

Ясно, что если замкнутое множество A имеет тип G_δ в X, то всякое отображение $f\colon A \to Y$ имеет тип G_δ с множеством A.

Утверждение. *Если Y — полное метрическое пространство, вес $Y \leqslant \tau$, A замкнуто в X, X τ-коллективно-нормально, то всякое отображение $f\colon A \to Y$ имеет тип G_δ с некоторым множеством B, причем* $\hat{f}(B) \subseteq [f(A)]_Y$.

Определение 2. Пространство X называется τ-коллективно-нормальным, если для каждой дискретной системы $\{F_\alpha : \alpha\}$ замкнутых множеств мощности $\leqslant \tau$ существует дискретная система $\{OF_\alpha : \alpha\}$ окрестностей.

2. Теорема 1. *Пусть Y — метрическое пространство, вес $Y \leqslant \tau$, X τ-коллективно-нормально и $f\colon A \to Y$ типа G_δ с множеством B,* $r\operatorname{Ind}(X \setminus B) \leqslant n+1$.

Тогда существует $\Phi = \bigcup \{\Phi_i : i\}$, где Φ_i замкнуты в X, $\{\Phi_i : i\}$ локально-конечно в $X \setminus B$, $\operatorname{Ind}\Phi_i \leqslant n$ и существует продолжение $F\colon X \setminus \Phi \to Y$.

Из теоремы 1 легко получить

Следствие 1. *Если Y — метрическое, вес $Y \leqslant \tau$, X — τ-коллективно-нормальное, совершенно-нормальное пространство и* $\operatorname{Ind}(X \setminus A) \leqslant n+1$, *то для каждого отображения $f\colon A \to Y$ существует Φ, замкнутое в $X \setminus A$, типа F_σ в X, $\operatorname{Ind}\Phi \leqslant n$, и существует продолжение $F\colon X \setminus \Phi \to Y$.*

Следствие 2. *Если Y — полное метрическое, вес $Y \leqslant \tau$, X τ-коллективно-нормальное и $r\operatorname{Ind}(X \setminus A) \leqslant n+1$, то для всякого отображения $f\colon A \to Y$ существует $\Phi = \bigcup\limits_i \Phi_i$, где Φ_i замкнуты в X, $\operatorname{Ind}\Phi_i \leqslant n$, и существует продолжение $F\colon X \setminus \Phi \to Y$.*

В теореме 1 и следствиях 1, 2 вместо требования «вес $Y \leqslant \tau$» можно либо потребовать от A некоторые свойства типа компактности, либо же считать, что пространство X коллективно-нормально.

Теорема, в некотором роде обратная к теореме 1, доказана даже в более малых предположениях в работе ([2]). Существенность τ-коллективной-нормальности пространства X видна из того, что Y содержит дискретное подмножество мощности τ; существенность полноты Y в следствии 2 видна из работы ([3]).

Если в следствии 2 положить $n = -1$, то получится усиление теорем Эллиса ([4]), а если в следствии 1 взять X метрическим и применить его для всех подмножеств $A \subseteq X$, где $Y = A$, то получится решение задачи, о которой говорилось выше.

3. Теорема 2. *Если Y метрическое, $Y \in LC^n$ (LC^n и C^n), вес $Y \leqslant \tau$, X τ-коллективно-нормально и $f\colon A \to Y$ типа G_δ с множеством B, $\dim(X \setminus B) \leqslant n+1$, то существует окрестность OB (окрестность OB равна всему X) и существует продолжение $F\colon OB \to Y$.*

Из теоремы 2 получаются

Следствие 3. *Если Y метрическое, вес $Y \leqslant \tau$, $Y \in LC^n$ (LC^n и C^n), X — τ-коллективно-нормальное, совершенно-нормальное пространство и $\dim(X \setminus A) \leqslant n+1$, то для каждого $f\colon A \to Y$ существуют OA ($OA = X$) и продолжение $F\colon OA \to Y$.*

Следствие 4. *Если Y полное метрическое, вес $Y \leqslant \tau$, $Y \in LC^n$ (LC^n и C^n), X τ-коллективно-нормальное и $r\dim(X \setminus A) \leqslant n+1$, то для каждого $f\colon A \to Y$ существуют OA ($OA = X$) и продолжение $F\colon OA \to Y$.*

Хорошо известным способом из теоремы 2 выводятся

Теорема 3. *Если Y метрическое, $Y \in LC^n$, вес $Y \leqslant \tau$, то для каждой $y_0 \in Y$ и каждой Uy_0 существует Oy_0, что всякое $f\colon A \to Oy_0$ типа G_δ с множеством B, $\dim(X \setminus B) \leqslant n+1$ ($A \subseteq B \subseteq X, X$ τ-коллективно-нормально) продолжается на всё пространство X в отображение $F\colon X \to Uy_0$.*

Теорема 4. *Если Y метрическое, $Y \in LC^n$, то для каждой $y_0 \in Y$ и каждой Uy_0 существует Oy_0, что всякое отображение $f\colon X \to Oy_0$, где X паракомпактно и $\dim X \leqslant n$ гомотопно нулю в Uy_0.*

Отметим, что если в следствии 4 взять $\tau = \aleph_0$, то тогда получится теорема из ([5], [6]) (так как нормальные пространства $\aleph_0$-коллективно-нормальны).

4. Теорема 5. *Пусть Y — выпуклое подмножество банахова пространства, вес $Y \leqslant \tau$, X τ-коллективно-нормально и $f\colon A \to Y$ типа G_δ с множеством B; тогда существует продолжение $F\colon X \to Y$.*

Следствие 5. *Если Y — метрическое пространство и абсолютный окрестностный ретракт метрических пространств (абсолютный ретракт), вес $Y \leqslant \tau$, X τ-коллективно-нормально и $f\colon A \to Y$ типа G_δ с множеством B, то существует окрестность OB ($OB = X$) и продолжение $F\colon OB \to Y$.*

Следствие 6. *Если Y — метрическое пространство и абсолютный окрестностный ретракт метрических пространств (абсолютный ретракт), вес $Y \leqslant \tau$, X τ-коллективно-нормально, совершенно нормально, то для каждого $f\colon A \to Y$ существует $OA (OA = X)$ и продолжение $F\colon OA \to Y$.*

Следствие 7. *Если Y — полное метрическое пространство и абсолютный окрестностный ретракт метрических пространств (абсолютный ретракт), вес $Y \leqslant \tau$, X τ-коллективно-нормально, то для каждого $f\colon A \to Y$ существуют OA ($OA = X$) и продолжение $F\colon OA \to Y$.*

Такого рода теоремы доказаны Майклом в работе ([7]).

5. Теорема 6. *Если Y, X метрические, $Y \in LC^p$, C^q, A замкнуто в X, $\dim(X \setminus A) \leqslant n+1$, $f\colon A \to Y$ непрерывно, то существуют Φ_1, Φ_2, что $\dim \Phi_1 \leqslant n-p-1$, $\dim \Phi_2 \leqslant n-q-1$, Φ_1 замкнуто* в $X \setminus A$, типа F_σ в X, *Φ_2 замкнуто в X и существует продолжение $F\colon X \setminus (\Phi_1 \cup \Phi_2) \to Y$.*

Эта теорема является усилением теорем Эйленберга — Борсука — Акасаки ([8]), Куратовского — Дугунджи ([9]) и Левшенко ([2]). Заметим, что Φ_1 и Φ_2 можно выбрать не разными для каждого $f\colon A \to Y$, а одними и теми же для всех отображений $f_\alpha\colon A \to Y_\alpha$, но тогда они будут обладать несколько более слабыми свойствами.

6. Теорема 7. *Если X метрическое, A замкнуто в X, $\dim(X \setminus A) \leqslant n+1$, то существует Φ, замкнутое в $X \setminus A$, типа F_σ в X с $\dim \Phi \leqslant n$ и существует замкнутая ретракция $r\colon X \setminus \Phi \to A$.*

Эта теорема для случая $n = -1$ впервые доказана Энгелькингом в работе ([10]).

В заключение автор выражает искреннюю благодарность проф. Ю. М. Смирнову за помощь в написании этой заметки.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
31 VIII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Т. Левшенко, Ю. М. Смирнов, Proc. II Symp. in Prague, Prague, 1966. [2] B. T. Levshenko, Fund. Math., **66**, 1 (1969). [3] O. Hanner, Arkiv Mat., **1**, 4 (1951). [4] R. Ellis, Math. Ann., **186**, 2 (1970). [5] B. H. Mccandless, Portug. Math., **26**, 479 (1967). [6] V. J. Mancuso, Canad. J. Math., **19**, 3 (1967). [7] E. Michael, Pacific J. Math., **3**, 4 (1953). [8] T. Akasaki, Duke Math. J., **32**, 4 (1965). [9] J. Dugundji, Comp. Math., **13**, 3 (1958). [10] R. Engelking, Proc. Am. Math. Soc., **21**, 3 (1969).