

А. С. МОНИН

# ЛАГРАНЖЕВО ОПИСАНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ ВОЛН

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 XI 1971)

При установившихся волнах в идеальной несжимаемой тяжелой жидкости со свободной поверхностью, распространяющихся в плоскости  $x, y$  (ось  $y$  направлена вертикально вверх) вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $c$  (подлежащей определению из уравнений динамики), координаты жидких частиц, находившихся в отсутствие волн в точках  $x_0, y_0$ , и давление  $p$  в этих частицах определяются формулами

$$\begin{aligned} z &= x' + iy = z(x'_0, y_0), \quad p = p(x'_0, y_0), \\ x' &= x - ct, \quad x'_0 = x_0 - ct, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t$  — время. Далее в качестве горизонтальных координат используются только  $x'$  и  $x'_0$  и штрихи опускаются. Функции  $z$  и  $p$  удовлетворяют лагранжевым уравнениям неразрывности и движения

$$\frac{\partial(z, z^*)}{\partial(x_0, y_0)} = -2iM; \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_0^2} = \frac{i}{M} \frac{\partial(\Pi, z)}{\partial(x_0, y_0)}, \quad (3)$$

где  $c^2 \Pi = p/\rho + gy$  ( $\rho$  — постоянная плотность жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести),  $M$  — произвольная вещественная функция от  $y_0$  (якобиан  $x, y$  по  $x_0, y_0$ ), звездочка обозначает комплексно-сопряженную величину. Функция  $z$  должна в отсутствие волн вырождаться в  $x_0 + iy_0$  и должна удовлетворять краевому условию  $\partial y / \partial x_0 = 0$  при  $y_0 = -H$  (обращение в ноль вертикальной скорости на дне); при  $H = \infty$  («глубокая вода») справедливо более сильное условие  $\partial z / \partial x_0 \rightarrow 1$ . Кроме того, на искривленной свободной поверхности, за которую примем линию  $y_0 = 0$ , создаваемый поверхностным натяжением скачок давления  $p - p_a$  (где  $p_a$  — атмосферное давление, считаемое далее постоянным, что соответствует свободным волнам) пропорционален кривизне поверхности:

$$p - p_a = \gamma \rho \left| \frac{\partial z}{\partial x_0} \right|^2 \operatorname{Im} \left( \frac{\partial z}{\partial x_0} \frac{\partial^2 z^*}{\partial x_0^2} \right) \quad \text{при } y_0 = 0, \quad (4)$$

где  $\gamma$  — коэффициент поверхностного натяжения. Отметим, что вихрь скорости в установившихся волнах определяется формулой

$$\Omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{c}{M} \frac{\partial(\partial z^* / \partial x_0, z)}{\partial(x_0, y_0)}, \quad (5)$$

где  $u, v$  — эйлеровы компоненты скорости движения.

**Теорема 1.** Единственным видом установившихся волн, в которых давление  $p$  зависит только от вертикальной лагранжевой координаты  $y_0$ , являются трохидальные волны Герстнера, т. е. гравитационные волны на глубокой воде ( $\gamma = 0, H = \infty$ ), описываемые формулами

$$z = x_0 + i(y_0 - 1/2 ka^2) + ia \exp(ky_0 + ikx_0), \quad c^2 = g/k, \quad (6)$$

где  $a$  и  $k = -\frac{1}{\rho c^2 M} \frac{\partial p}{\partial y_0}$  — произвольные постоянные.

Для доказательства достаточно подставить  $\Pi = \frac{p(y_0)}{\rho c^2} + \frac{gy}{c^2}$  в уравнение (3), которое при этом становится линейным обыкновенным по  $x_0$  уравнением относительно  $z$  и легко решается, причем все его решения, удовлетворяющие уравнению (2) и сформулированным выше условиям, имеют вид (6). Отметим, что для волн Герстнера

$$\Omega = -\frac{c}{M} \cdot 2a^2 k^2 \exp(2ky_0), \quad M = 1 - a^2 k^2 \exp(2ky_0), \quad (7)$$

т. е. они вихревые. Таким образом, волны Герстнера оказываются исключением: во всех остальных установившихся волнах давление обязано зависеть от горизонтальной координаты  $x_0$ .

**Теорема 2.** Как для потенциальных, так и для вихревых волн, уравнения (2), (3) имеют первый интеграл

$$\frac{1}{2} \left| \frac{\partial z}{\partial x_0} \right|^2 + \Pi = \frac{1}{2} + \frac{p_a}{\rho c^2} + f(y_0), \quad (8)$$

аналогичный интегралу Бернулли, где  $f(y_0)$  — произвольная функция (удовлетворяющая условию  $f(0) = 0$ ; постоянное слагаемое в правой части (8) выбрано так, чтобы в отсутствие волн удовлетворялось условие (4)).

Для доказательства достаточно умножить (3) на  $\partial z^* / \partial x_0$ , сложить результат с комплексно-сопряженным выражением и затем проинтегрировать по  $x_0$ .

**Теорема 3.** Поле движения в установившихся волнах (т. е. функция  $z$ ) определяется из уравнения

$$\frac{\partial(z, \partial z^* / \partial x_0)}{\partial(x_0, y_0)} = f'(y_0) \quad (9)$$

при краевом условии на свободной поверхности

$$\frac{c^2}{2} \left| \frac{\partial z}{\partial x_0} \right|^2 + gy + \gamma \left| \frac{\partial z}{\partial x_0} \right|^{-3} \operatorname{Im} \left( \frac{\partial z}{\partial x_0} \frac{\partial^2 z^*}{\partial x_0^2} \right) = \frac{c^2}{2} \quad \text{при } y_0 = 0, \quad (10)$$

краевом условии на дне и условии вырождения в отсутствие волн. После определения поля движения давление  $p$  находится из (8).

Уравнение (9) получается исключением  $\partial \Pi / \partial y_0$  при помощи (8) из выражения для  $\frac{\partial z^*}{\partial y_0} \frac{\partial^2 z}{\partial x_0^2} + \frac{\partial z}{\partial y_0} \frac{\partial^2 z^*}{\partial x_0^2}$ , находимого с помощью (3). Вследствие вещественности  $f'(y_0)$  из (9) вытекает уравнение неразрывности (2) в форме  $\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial(z, z^*)}{\partial(x_0, y_0)} = 0$ . Условие (10) получается исключением  $p$  из (4) при помощи (8).

**Теорема 4.** В установившихся волнах вихрь скорости может зависеть только от вертикальной лагранжевой координаты  $y_0$ .

Доказывается сравнением (5) и (9).

**Теорема 5.** Для потенциальных волн уравнение (9) имеет первый интеграл

$$\partial z^* / \partial x_0 = w(z), \quad (11)$$

где  $w(z)$  — произвольная аналитическая функция, которая должна в отсутствие волн вырождаться в единицу и должна удовлетворять условию на дне  $\operatorname{Im} w = 0$  при  $y = -H$  (или  $w \rightarrow 1$  при  $H = \infty$  и условию на свободной поверхности

$$-\frac{c^2}{2} |w|^2 + gy + \gamma |w|^{-3} \operatorname{Im}(w' w^{*2}) = \frac{c^2}{2} \quad \text{при } y_0 = 0. \quad (12)$$

Доказывается как следствие теоремы 3 при условии  $f'(y_0) \equiv 0$  (а потому и  $f(y_0) \equiv 0$ ), выделяющем потенциальные волны. Функция  $w(z)$  отличается лишь постоянным множителем —  $c$  от эйлеровой комплексной

скорости  $u - iv$  в движущейся со скоростью  $c$  системе координат  $x, y$ , так что использование (11) фактически означает переход к эйлерову описанию движения.

**Теорема 6.** Все вихревые волны с различными распределениями  $f'(y_0)$  нормированного вихря  $-M\Omega/c$  получаются из волн с  $f'(y_0) \equiv 1$  заменой вертикальной координаты  $y_0$  на  $f$ , т. е. удовлетворяют универсальному уравнению

$$\frac{\partial(z, \partial z^* / \partial x_0)}{\partial(x_0, f)} = 1, \quad (13)$$

причем свободной поверхностью оказывается линия  $f = 0$ .

Периодические волны длины  $2\pi/k$ , которые будем считать симметричными относительно их гребней, представимы рядами Фурье

$$z = x_0 + i \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(y_0) \exp(in k x_0), \quad (14)$$

где  $a_n$  — вещественные амплитуды, которые в отсутствие волн (т. е. при  $k = 0$ ) должны вырождаться при  $n \neq 0$  в нули, а при  $n = 0$  — в  $y_0$  (непериодические, или одиночные, волны представимы аналогичными интегралами Фурье). Из (9) получается следующая расшифровка смысла функций  $M(y_0)$  и  $f(y_0)$ :

$$M = \frac{d}{dy_0} \left( a_0 - \frac{k}{2} \sum_n n a_n^2 \right), \quad (15)$$

$$f = \text{const} + k^2 \sum_n n^2 a_n^2,$$

а при  $n \neq 0$  получаются следующие уравнения для амплитуд:

$$a'_n = \frac{k}{n} \sum_m [m^2 a_m a'_{m-n} + m(m-n) a'_m a_{m-n}], \quad (16)$$

где штрих означает производную по  $y_0$  (или, для вихревых волн, по  $f$ ). В случае гравитационных волн ( $\gamma = 0$ ) из (10) получаются следующие краевые условия для амплитуд на свободной поверхности  $y_0 = 0$ :

$$g(a_n + a_{-n}) + k c^2 n(a_{-n} - a_n) + k^2 c^2 \sum_m m(m+n) a_m a_{m+n} = 0. \quad (17)$$

Отсюда легко получаются, в частности, волны Герстнера (6); случай  $f \equiv 0$  здесь отвечает волнам Стокса.

Институт океанологии им. П. П. Ширшова  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
20 XI 1971