

УДК 66.021.24

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

Ю. М. ВОЛИН, Г. М. ОСТРОВСКИЙ,
член-корреспондент АН СССР М. Г. СЛИНЬКО

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА С РЕЦИКЛОМ

В работе ⁽¹⁾ были получены условия устойчивости для гомогенного реактора с рециклом. Существенным моментом при выводе этих условий было то обстоятельство, что такой реактор рассматривался как звено запаздывания.

Данная работа посвящена получению условий устойчивости для любого каталитического реактора в рецикле (рис. 1), который из-за различия в теплоемкостях газа и катализатора не является звеном запаздывания.

Процесс в каталитическом реакторе в квазигомогенном приближении описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} - u \frac{\partial C_i}{\partial l} + w_i(C, T) = 0, \quad 0 \leq t, \quad 0 \leq l \leq L; \quad (1)$$

$$(\rho_r C_{Pr} \varepsilon + \rho_k C_k (1 - \varepsilon)) \frac{\partial T}{\partial t} - u \rho_r C_{Pr} \frac{\partial T}{\partial l} + \sum_{j=1}^m Q_j r_j(C, T) - q = 0; \quad (2)$$

$$w_i = \sum_{j=1}^m s_{ij} r_j; \quad (3)$$

$$C_i(l, 0) = \hat{C}_i(l), \quad T(l, 0) = \hat{T}(l); \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_i) G C_i(L, t) + G_0 C_{i0}(t) &= G C_i(0, t), \\ G \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i(L, t) T(L, t) + G_0 T_0(t) &= G T(0, t), \end{aligned} \quad (5)$$

где $1 = i = n'$; C_i — концентрация i -го компонента; T — температура; u — скорость газа; l — длина; t — время; r_j , Q_j — скорость и тепловой эффект j -й реакции; s_{ij} — стехиометрический коэффициент; q — количество отводимого тепла; α — параметр рециркуляции; ε — доля свободного объема в реакторе; C_{Pr} , C_k , ρ_r , ρ_k — соответственно теплоемкости и плотности газа и катализатора; G — расход газа; α_i — коэффициенты, определяемые характеристиками работы блока разделения и сброса.

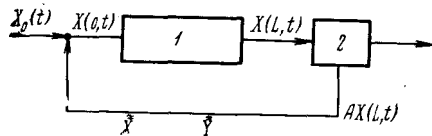


Рис. 1. Реактор в рецикле: 1 — реактор, 2 — блок разделения и сброса

Реактор, описываемый уравнениями (1) — (3), устойчив, но в системе с рециклом (1) — (5) возможны неустойчивые стационарные состояния.

Вопрос об устойчивости системы (1) — (5) в первом приближении решается переходом к линеаризованной системе

$$\frac{\partial X}{\partial t} - U \frac{\partial X}{\partial l} + R(l)x = 0, \quad 0 \leq t, \quad 0 \leq l \leq L; \quad (6)$$

$$AX(L, t) + x_0(t) = X(0, t) \quad (7)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$; $n = n' + 1$; U — диагональная матрица размерности $n \times n$, причем $u_i = u_{ii} > 0$; $R(l)$ — матрица размерности $n \times n$;

$$x = C_i - C_i^*, u_i = u, i = 1, \dots, n'; x_n = T - T^*,$$

$$u_n = \frac{u p_r C_{pr}}{p_r C_{pr} \varepsilon + p_k C_k (1 - \varepsilon)};$$

$R_{ij}(l)$ получаются линеаризацией w_i, r_j, q при стационарных значениях

$$C_i^*(l), T^*(l); x_{0i} = \frac{G_0}{G} (C_{0i} - C_{0i}^*) \quad i = 1, \dots, n', \quad x_{0n} = \frac{G_0}{G} (T_0 - T_0^*).$$

Исследование устойчивости нулевого решения системы (6), (7) может быть проведено с помощью преобразования по Лапласу. В результате применения преобразования к системе (6), (7) получаем систему для изображений

$$U dX / dl - R(l)X = pX, \quad 0 \leq l \leq L, \quad (8)$$

$$AX(L) + X_0 = X(0). \quad (9)$$

Можно показать, что для устойчивости нулевого решения системы (6), (7) необходимо отсутствие особенностей у решений системы (8), (9) при $\operatorname{Re} p > 0$ (если $X_0(P)$ не имеет особенностей при $\operatorname{Re} p > 0$) и достаточно (для асимптотической устойчивости) отсутствие особенностей при $\operatorname{Re} p < \delta$ ($\delta < 0$). Сформулированное утверждение является некоторым общим принципом, который во многих случаях может оказаться полезным для получения условий устойчивости стационарных состояний сложных химико-технологических систем (в ⁽²⁾ аналог этого утверждения доказывается для химико-технологической системы произвольной структуры, состоящей из блоков, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и конечными уравнениями с запаздыванием). В данной задаче применение этого принципа приводит к следующему результату.

Теорема. Для устойчивости стационарного состояния $C_i^*(l), T^*(l)$ системы (1) — (5) необходимо, чтобы

$$\Delta(p) = \det(I - F(p)) \neq 0 \quad (10)$$

при $\operatorname{Re} p > 0$, и достаточно (для асимптотической устойчивости), если (10) выполняется при $\operatorname{Re} p > \delta$ ($\delta > 0$).

$F(p)$ — передаточная матричная функция от $\tilde{X}$ к $\tilde{Y}$ (см. рис. 1):

$$F(p) = AW(l, p). \quad (11)$$

$W(l, p)$ — матрица размерности $n \times n$, удовлетворяющая по l уравнению (8) и начальному условию

$$W(0, p) = I, \quad (12)$$

I — единичная матрица. $W(l, p)$ (как решение системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, аналитически зависящими от p), а следовательно, и $\Delta(p)$, являются аналитическими функциями p . В результате приходим к задаче, ставшей стандартной при исследовании вопросов устойчивости: проверить наличие нулей в правой полуплоскости комплексного переменного p некоторой аналитической функции $\Delta(p)$. Для решения этой задачи обычно применяются различные варианты метода аргумента и метод Д-разбиений ⁽³⁾. В данной задаче возникают, однако, дополнительные трудности, связанные с трудоемкостью вычисления $\Delta(p)$, для которого требуется каждый раз находить функциональную систему решений уравнения (8). Для уменьшения трудоемкости вычисления $\Delta(p)$ можно воспользоваться представлением $W(l, p)$ в виде степенного ряда

$$W(l, p) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k(l) p^k. \quad (13)$$

Методом последовательных приближений легко показать, что

$$a^0(l) = G(l, 0), \quad (14)$$

$$a^{m+1}(l) = - \int_0^l G(l, \xi) K a^m(\xi) d\xi, \quad m \geq 0, \quad (15)$$

где $K = U^{-1}$; $G(l, \xi)$ — функция Грина системы

$$U dX/dl - R(l)X = f(l). \quad (16)$$

Разложение (13) обладает сходимостью экспоненциального ряда:

$$|a_{ij}^m(l)| \leq C l^m / n!, \quad (17)$$

$$C = n^L \max_{i, j, l, \xi} G_{ij}(l, \xi). \quad (18)$$

При помощи (13) — (15) можно получить приближенное представление для $F(p)$, причем в силу оценки (17) во многих случаях оказывается возможным ограничиться небольшим количеством членов разложения.

Если $K_i = K$, $i = 1, \dots, n$, то непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$a^m(l) = (-1)^m \frac{l^m}{m!} a^0(l). \quad (19)$$

Соответственно

$$F(p) = A e^{-pL} a_0^0(L) = A e^{-pL} G(L, 0), \quad (20)$$

и критерием устойчивости является отсутствие нулей вне единичного круга полинома

$$\Delta^*(\lambda) = \det(\lambda I - AG(L, 0)), \quad (21)$$

где $\lambda = e^{pL}$ (этот результат непосредственно был получен в ⁽¹⁾). С помощью $\Delta^*(\lambda)$ может быть проведено исследование устойчивости для гомогенных реакторов с рециклом.

Институт катализа
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
22 VII 1971

Физико-химический институт
им. Л. Я. Карпова
Москва

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ P. Luss, N. Amundson, Am. Inst. Chem. Eng., **13**, № 2, 279 (1967). ² Ю. М. Волин, Г. М. Островский, М. Г. Слинько, Устойчивость стационарных состояний сложных химико-технологических схем. В сборн. Тр. IV Всесоюз. конфер. по химическим реакторам, 1971. ³ А. А. Фельдбаум, Электрические системы автоматического регулирования, 1957.