

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Л. Д. КУДРЯВЦЕВ

О ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 14 VII 1971)

Пусть E^n — n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, $E^{n-1} = \{x: x_n = 0\}$, $E_b^{n+} = \{x: 0 < x_n < b \leq +\infty\}$ («полоса»), $E^n = E_{+\infty}^n$ (полупространство), $x^{(n-1)} = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Будем также писать $x = (x^{(n-1)}, x_n)$.

Если B — полунормированное пространство, то через $|x, B|$ будем обозначать полунорму элемента x в пространстве B .

Пусть G — открытое множество, $G \subset E^n$, $\varphi = \varphi(x)$ — неотрицательная измеримая на G функция, $1 \leq p \leq +\infty$. Для каждого неотрицательного целого r_i обозначим через $L_{p, \varphi}^{r_i} = L_{p, \varphi}^{r_i}(G)$ линейное полунормированное пространство функций f , имеющих в G обобщенные производные порядка r_i по переменной x_i , причем $\int \left| \varphi \frac{\partial^{r_i} f}{\partial x_i^{r_i}} \right|^p dG < +\infty$. Полунорма в этом пространстве определяется по формуле

$$|f, L_{p, \varphi}^{r_i}| = \left| \varphi \frac{\partial^{r_i} f}{\partial x_i^{r_i}}, L_p(G) \right|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Функция $\varphi(x)$ называется весовой функцией. Положим

$$L_{p, \varphi_i \varphi_j}^{r_i r_j} = L_{p, \varphi_i}^{r_i} \cap L_{p, \varphi_j}^{r_j},$$

$$|f, L_{p, \varphi_i \varphi_j}^{r_i r_j}| = |f, L_{p, \varphi_i}^{r_i}| + |f, L_{p, \varphi_j}^{r_j}|.$$

Через $\Delta_{x_i}^k(h)f(x)$ обозначается k -я разность функции f с шагом h по переменной x_i ($k = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, n$).

Теорема 1. Пусть $r_i \geq 1, r_n \geq 1$,

$$\int_0^b \varphi_i^{-q}(t) dt < +\infty, \quad \int_0^b \varphi_n^{-q}(t) dt < +\infty, \quad f(x) \in L_{p, \varphi_i \varphi_n}^{r_i r_n}(E_b^n),$$

i фиксировано, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $1/p + 1/q = 1$, $0 \leq s < r_n$, $k \geq r_1$, k и s целые, и пусть

$$G_v(t) = \frac{1}{t} \left[\int_0^t \varphi_v^{-q}(t) dt \right]^{1/q}, \quad v = i, n.$$

Тогда для любого $t \in (0, b)$ справедливо неравенство

$$\left| \Delta_{x_i}^k(h) \frac{\partial^{sf}(x^{(n-1)}, 0)}{\partial x_n^s}, L_p(E^{n-1}) \right| \leq c |f, L_{p, \varphi_i \varphi_n}^{r_i r_n}| [|h|^{r_i} t^{-s} G_i(t) + t^{r_n-s} G_n(t)],$$

(1)

где постоянная $c > 0$ не зависит от функции f .

Следствие. При $s = 0$

$$|\Delta_{x_i}^k(h)f, L_p(E^{n-1})| \leq c |f, L_{p, \varphi_i \varphi_n}^{r_i r_n}| [|h|^{r_i} G_i(t) + t^{r_n} G_n(t)].$$

Доказательство теоремы 1 основано на следующей лемме.

Лемма 1. Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ имеет в полосе $E_b^2 = \{(x, y): 0 < y < b\}$ обобщенные частные производные $\partial^{r_1} f / \partial x^{r_1}$ и $\partial^{r_2} f / \partial y^{r_2}$, $r_1 \geq 1$, $r_2 \geq 1$. Пусть для почти всех x производная $\partial^{r_2} f / \partial y^{r_2}$ суммируема на отрезке $[0, b]$ и пусть $0 \leq s < r_2$, $k \geq r_1$, s и k целые.

Тогда для любого $t \in (0, b)$ выполняется неравенство

$$\left| \Delta_x^k(h) \frac{\partial^s f(x, 0)}{\partial y^s} \right| \leq \frac{c_1 |h|^{r_1-1}}{t^{s+1}} \int_0^t dy \int_0^{k|h|} \left| \frac{\partial^{r_1} f(x + v \operatorname{sign} h, y)}{\partial x^{r_1}} \right| dv + \\ + \frac{c_2}{t} \sum_{j=0}^k \int_0^t dy \int_0^y u^{r_2-s-1} \left| \frac{\partial^{r_2} f(x + jh, u)}{\partial y^{r_2}} \right| du.$$

Параметрическое неравенство (1) содержит описание следов функций многих переменных на $(n-1)$ -мерных гиперплоскостях в терминах интегрального условия Гёльдера (теоремы этого типа см. в ^(1, 2)) и критерий о выходе функции на полином, в частности на константу (см. ⁽³⁾). Первая теорема о выходе функции на полином (отличная от полученной в настоящей работе) была получена ранее ⁽⁴⁾.

Теорема 2. Если в предположениях теоремы 1

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-s} G_i(t) = 0 \quad (2)$$

и функция $\partial^s f(x^{(n-1)}, 0) / \partial x_n^s$ локально суммируема, то она по переменной x_i является многочленом степени не выше чем $r_i - 1$.

Следствие 1. Если для всех $i = 1, 2, \dots, n-1$ выполняется условие (2) и функция $\partial^s f(x^{(n-1)}, 0) / \partial x_n^s$ локально суммируема, то она является многочленом.

Следствие 2. Пусть $f(x) \in L_{p, x_n^{r_n} \alpha_n}^{r_i r_n}(E_1^n)$; тогда, если $\alpha_i < -1/p$, $\alpha_n < 1 - 1/p$, то функция $f(x^{(n-1)}, 0)$ является по переменной x_i многочленом степени не выше, чем $r_i - 1$.

Теорема 3. Пусть в предположениях теоремы 1 функция $G_i(t)$ монотонно убывает. Обозначим через $t(h)$ функцию, определенную и обратную функции

$$h = t^{r_n/r_i} G_n^{1/r_n} G_i^{-1/r_i}(t) \quad (3)$$

для достаточно малых h .

Тогда

$$|\Delta_{x_i}^k(h) f(x^{(n-1)}, 0), L_p(E^{n-1})| \leq c |f, L_{p, \varphi_i \varphi_n}^{r_i r_n} G_i(t(h))| |h|^{r_i},$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от функции f .

Заметим, что функция (3) всегда строго монотонна, когда $\varphi_i(t) = \varphi_n(t)$, в этом случае $t(h) = h^{r_i/r_n}$, а также, когда веса суть степенные функции, $\varphi_i(t) = t^{\alpha_i}$, $\varphi_n(t) = t^{\alpha_n}$; здесь $t(h) = h^{r_i/(r_n + \alpha_i - \alpha_n)}$, $r_n + \alpha_i + \alpha_n = 0$.

Следствие. Если $\varphi_i(t) = \varphi_n(t) = \varphi(t)$ и

$$G(t) = \frac{1}{t} \left[\int_0^t \varphi^{-q}(u) du \right]^{1/q},$$

$$\text{то } |\Delta_{x_i}^k(h) f(x^{(n-1)}, 0), L_p(E^{n-1})| \leq c |f, L_{p, \varphi \varphi}^{r_i r_n} G(t^{r_n/r_i})| |h|^{r_i}.$$

Пусть теперь

$$\omega(t) = \varphi^{-q/p}(t) \left[\int_0^t \varphi^{-q}(t) dt \right]^{-1}. \quad (4)$$

Функции $\omega(t)$ возникают, например, в известном обобщенном неравенстве Харди

$$\left[\int_0^b \left| \omega(t) \int_0^t f(u) du \right|^p dt \right]^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \left[\int_0^b |\varphi(t) f(t)|^p dt \right]^{1/p}.$$

Пусть i фиксировано, $i = 1, 2, \dots, n-1$, и функции $\omega_i(t)$, $\omega_n(t)$ определяются по формуле (4) через функции $\varphi_i(t)$ и $\varphi_n(t)$. Если функция

$$\Phi(t) = \omega_i(t) \omega_n^{-1}(t) t^r, \quad 0 < t < b, \quad (5)$$

строго монотонна, то через $t = t(h)$, $0 < h < B$, будем обозначать функцию, обратную функции $h = \Phi^{1/r_i}(t)$, $0 < t < b$. Положим

$$\beta_s(h) = \frac{\omega_n[t(h)] |t'(h)|^{1/p}}{t^{r_n-s-1}}, \quad s = 0, 1, \dots, r_{n-1}. \quad (6)$$

Теорема 4. Пусть $r_i \geq 1$, $r_n \geq 1$, $\int_0^\eta \varphi_i^{-q}(t) dt < +\infty$, $\int_0^\eta \varphi_n^{-q}(t) dt < +\infty$ для всех $\eta \in (0, b)$ и пусть функция (5) строго монотонна и дифференцируема.

Тогда, если $f \in L_{p, \varphi_i \varphi_n}^{r_i r_n}(E_b^n)$, то для любого $k \geq r_i$ выполняется неравенство

$$\left[\int_0^B \beta_s^p(h) dh \int \left| \Delta_{x_i}^k(h) \frac{\partial^s f(x^{(n-1)}, 0)}{\partial x_n^s} \right|^p dE^{n-1} \right]^{1/p} \leq c \|f\|, L_{p, \varphi_i \varphi_n}^{r_i r_n}(E_b^n),$$

$$s = 0, 1, \dots, r_n - 1,$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от функции f , а функция $\beta_s(h)$ определяется формулой (6).

В случае, когда весовые функции степенные: $\varphi_i(t) = t^{\alpha_i}$, $\varphi_n(t) = t^{\alpha_n}$, $\alpha_i < 1 - 1/p$, $\alpha_n < 1 - 1/p$, имеем $\Phi(t) \asymp t^{r_n - \alpha_n + \alpha_i}$ (при $t \rightarrow 0$), $t(h) = h^\lambda$, где $\lambda = 1/(r_n + \alpha_i - \alpha_n)$, $\beta_s(h) = h^{-1-\mu p}$; здесь $\mu = r_i(r_n - \alpha_n - s - 1/p)/(r_n + \alpha_i - \alpha_n)$. Этот результат был получен ранее в (5).

При определенных условиях на весовые функции $\varphi_i(t)$ между теоремами 1 и 4 устанавливается связь. Пусть функция $\varphi(t)$ неотрицательна, не убывает и для нее существует такая постоянная $\varepsilon > 0$, что

$$\varphi(t) \leq 2^{1/q} (1 + \varepsilon)^{-1} \varphi(t/2) \quad (7)$$

для всех $t \in (0, b)$.

Теорема 5. Пусть $f \in L_{p, \varphi}^{1, 1, n}(E_b^n)$ и пусть функция $\varphi(t)$ неотрицательна, не убывает, удовлетворяет условию (7) и для всех $\eta \in (0, b)$

$$\int_0^\eta \varphi^{-q}(t) dt < +\infty.$$

Тогда

$$\left[\int \left| \Delta_{x_i}^1(h) f(x^{(n-1)}, 0) \right|^p dE^{n-1} \right]^{1/p} \leq \left[\int_0^h \varphi^{-q}(t) dt \right]^{1/q} \left[\int_0^h \omega^p(t) dt \int \left| \Delta_{x_i}^1(t) f(x^{(n-1)}, 0) \right|^p dE^{n-1} \right]^{1/p}, \quad (8)$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от функции f , а функция $\omega(t)$ определяется через функцию $\varphi(t)$ по формуле (4).

Доказательство теоремы 5 основано на следующей лемме.

Лемма 2. Пусть функция $F(t)$ определена и неотрицательна на интервале $(0, a)$ и для всех $t_1 \in (0, a)$ и $t_2 \in (0, a)$ таких, что $t_1 + t_2 \in (0, a)$ эта функция удовлетворяет неравенству

$$F(t_1 + t_2) \leq F(t_1) + F(t_2).$$

Пусть функция $\varphi(t)$ удовлетворяет на интервале $(0, a)$ условию (7) и

$\int_0^t \varphi^{-q}(u) du < +\infty$ для всех $t \in (0, a)$, а функция $\omega(t)$ определена формулой (4).

Тогда для каждого $t \in (0, a)$ справедливо неравенство

$$F(t) \leq c \left[\int_0^t \varphi^{-q}(u) du \right]^{1/q} \left[\int_0^t \omega^p(u) F^p(u) du \right]^{1/p},$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от функции $F(t)$.

В случае, когда весовая функция $\varphi(t)$ является степенной функцией, неравенство (8) было доказано Л. Н. Слободецким⁽⁶⁾.

Для весовых функций $\varphi(t)$ удовлетворяющих условию (7), удастся получить и некоторые обратные теоремы о следах.

Пусть $\varphi_i(t) = \varphi_n(t) = \varphi(t)$, $r_i = r_n = 1$, функция $\varphi(t)$ неотрицательна, не убывает, удовлетворяет условию (7) на интервале $(0, b)$ и существует такое $a \in (0, b)$, что $\int_0^a \varphi^{-q}(t) dt < +\infty$. Пусть функция $\omega(t)$ определяется по формуле (4).

Тогда, если функция f , определенная и локально суммируемая на гиперплоскости E^{n-1} , удовлетворяет условию

$$A_i(f) = \left[\int_0^b \omega(t) dt \int |\Delta_{x_i}(t) f(x^{(n-1)})|^p dE^{n-1} \right]^{1/p} < +\infty,$$

то существует функция $u(x)$, определенная на полупространстве E^n и такая, что

$$u(x^{(n-1)}, 0) = f(x^{(n-1)}),$$

$$|u(x^{(n-1)}, y) - f(x^{(n-1)})|_{L_p(E^{n-1})} = o \left[\left(\int_0^y \varphi^{-q}(t) dt \right)^{1/q} \right] \quad \text{при } y \rightarrow 0,$$

$$|u, L_{p, \varphi}^1(E^n)| < c \sum_{j=1}^{n-1} A_j(f), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от функции f .

Следует отметить, что хотя этот результат формально несколько более общий, чем соответствующий результат Г. Н. Яковлева⁽⁷⁾, однако по существу он находится в круге тех же идей.

Полученные теоремы дают возможность изучать и следы функций в бесконечности по какому-либо полю направлений. Для этого достаточно лишь сделать замену переменных, сводящую стремление к бесконечности к стремлению к конечному пределу.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
17 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. ² С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», 1969. ³ С. В. Успенский, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **60**, 282 (1961). ⁴ С. Л. Соболев, Сибирск. матем. журн., **4**, № 3, 673 (1963). ⁵ С. В. Успенский, Сибирск. матем. журн., **7**, № 2, 409 (1966). ⁶ Л. Н. Слободецкий, УМН, **15**, в. 3 (93), 177 (1960). ⁷ Г. Н. Яковлев, Теоремы вложения и их приложения. Тр. симп. в Баку, «Наука», 1970, стр. 225.