

Э. М. СААК

ОЦЕНКА ИЗМЕНЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ПРИ ВАРИАЦИИ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 12 X 1971)

Рассматривается гильбертово пространство $L_2^{(s)}$ финитных комплексных функций $f(z)$, $\varphi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ со скалярным произведением

$$\langle f, \varphi \rangle^{(s)} = \iint \sum_{k=0}^s \frac{s!}{k!(s-k)!} \frac{\partial^s f(z)}{\partial \bar{z}^k \partial z^{s-k}} \frac{\overline{\partial^s \varphi(z)}}{\partial \bar{z}^k \partial z^{s-k}} dx dy,$$

где производные $\partial / \partial z$ и $\partial / \partial \bar{z}$ понимаются в смысле С. Л. Соболева ((¹), стр. 47), а интеграл — в смысле Лебега, причем интегрирование производится по всей плоскости.

Используется также банахово пространство $L_p^{(s)}$, $1 \leq p \leq \infty$, с нормой

$$\|f\|_{L_p^{(s)}} = \left\{ \iint \left(\sum_{k=0}^s \frac{s!}{k!(s-k)!} \left| \frac{\partial^s f(z)}{\partial \bar{z}^k \partial z^{s-k}} \right|^2 \right)^{p/2} dx dy \right\}^{1/p}$$

и модуль непрерывности s -го порядка $\omega_p^{(s)}(\delta)$,

$$\omega_p^{(s)}(\delta) = \sup_{|h| < \delta} \|f(z+h) - f(z)\|_{L_p^{(s)}}.$$

Через A обозначается эллиптический дифференциальный оператор

$$Af = \sum_{k=0}^m a_k \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \quad (1)$$

порядка m с постоянными комплексными коэффициентами a_k .

Теорема 1. Пусть плоский компакт E имеет конечное число дополнительных областей. Пусть E_δ — некоторое открытое множество и $E \subset E_\delta$.

Если все точки границы множества E удалены от границы множества E_δ не более чем на δ , и если функция $f(z) \in L_p^{(s)}$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq s < \infty$, и во всех внутренних точках множества E является решением уравнения $Af = 0$, то существует функция $f_\delta(z) \in L_p^{(0)}$, являющаяся решением того же самого уравнения в E_δ , такая, что

$$\|f - f_\delta\|_{L_p^{(0)}} \leq c_1 \omega_p^{(s)}(\delta) \delta^s.$$

Примечание. Пусть диаметр E не больше чем D , а диаметр дополнительных к E компонент не меньше чем $d > 0$. Через c_j , $j = 1, 2, \dots$, обозначаются постоянные, зависящие только от d , D , s и оператора A .

Доказательство. При $p = \infty$ эта теорема доказана в (³). При $1 \leq p < \infty$ доказательство может быть получено с помощью леммы об аппроксимации фундаментального решения, содержащейся в работах (², ³).

Если $f(z)$ — всюду непрерывная функция, то через $u_{f,E}(z)$ будем обозначать гармоническую во всех внутренних точках множества E функцию, совпадающую с $f(z)$ на границе ∂E множества E и вне E .

Теорема 2. Если все точки симметрической разности компакта E и открытого множества E_δ удалены от ∂E не более чем на δ и если E удовлетворяет условию теоремы 1, то справедливо неравенство

$$|u_{f,E}(z) - u_{f,E_\delta}(z)| \leq c_2 \omega^{(s)}(\delta) \delta^s, \quad (2)$$

где $\omega^{(s)}(\delta) = \omega_\infty^{(s)}(\delta)$ — модуль непрерывности s -го порядка функции $u_{f,E}(z)$.

Доказательство. По теореме 1 существует гармоническая в E_δ всюду непрерывная функция $u_\delta(z)$ такая, что

$$|u_{f,E}(z) - u_\delta(z)| < c_1 \omega^{(s)}(\delta) \delta^s. \quad (3)$$

Имеем для z вне E_δ

$$|u_\delta(z) - u_{f,E_\delta}(z)| \leq |u_\delta(z) - u_{f,E}(z)| + |u_{f,E}(z) - f(z)| \leq c_3 \omega^{(s)}(\delta) \delta^s.$$

Отсюда в силу принципа максимума получаем для $z \in E_\delta$ и, стало быть, для всех z

$$|u_\delta(z) - u_{f,E}(z)| \leq c_3 \omega^{(s)}(\delta) \delta^s. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует оценка (2).

Теорема 3. Пусть компакт E и открытое множество E_δ удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть функция $u \in L_p^{(s)}$, $1 < p < \infty$, и во всех внутренних точках E является решением уравнения $Au = 0$.

Тогда существует функция $u_\delta \in L_p^{(\mu)}$ и являющаяся решением того же самого уравнения в E_δ такая, что

$$\|u - u_\delta\|_{L_p^{(\mu)}} \leq c_4 \omega_p^{(s)}(\delta) \delta^{s-\mu}, \quad (5)$$

где $\omega_p^{(s)}(\delta)$ — модуль непрерывности функции $u(z)$, $0 \leq \mu \leq s$.

Доказательство. При $s = 0$ доказываемое следует из теоремы 1. Пусть теперь $s \geq 1$. Доказательство проведем индукцией по m , где m — порядок уравнения $Au = 0$. Пусть вначале $m = 1$. Для $\mu = 0$ доказываемое верно в силу теоремы 1. Но при $m = 1$ справедливость теоремы для $\mu = 0$ влечет за собой ее справедливость и при любом μ , $0 \leq \mu \leq s$. Итак, для $m = 1$ теорема верна. Предположим, что теорема установлена для уравнений порядка $(m-1)$, и покажем, что тогда она верна и для уравнения порядка m . Оператор A без ограничения общности можно считать представимым в виде $A = A_1 \partial / \partial \bar{z}$, где A_1 — эллиптический оператор вида (1), но порядка $(m-1)$. Функцию $\partial u / \partial \bar{z} \in L_p^{(s-1)}$ можно по предположению приблизить функцией $(\partial u / \partial \bar{z})_\delta$, удовлетворяющей в E_δ уравнению $A_1(\partial u / \partial \bar{z})_\delta = 0$, так, чтобы

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right)_\delta \right\|_{L_p^{(\mu-1)}} \leq c_4 \omega_p^{(s-1)}(\delta) \delta^{s-1-(\mu-1)}, \quad (6)$$

где $\omega_p^{(s-1)}(\delta)$ — модуль непрерывности функции $\partial u / \partial \bar{z} \in L_p^{(s-1)}$, который не превосходит модуля непрерывности $\omega_p^{(s)}(\delta)$ функции $u(z)$. Воспользуемся теперь операторами T и Π , построенными в (1), применительно к случаю, когда областью интегрирования служит вся плоскость. По свойству оператора T (1), стр. 87) имеем

$$u(z) = T \partial u(z) / \partial \bar{z}. \quad (7)$$

Положим

$$u_\delta(z) = T(\partial u(z) / \partial \bar{z})_\delta. \quad (8)$$

Из (7) и (8) в силу свойств оператора T и определения оператора Π ((¹), стр. 72) следует, что

$$-\frac{\partial^{\mu}}{\partial \bar{z}^k \partial z^{\mu-k}}(u - u_{\delta}) = \frac{\partial^{\mu-1}}{\partial \bar{z}^{k-1} \partial z^{\mu-k}} \left[\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right)_{\delta} \right]$$

для $k = 1, 2, \dots, \mu$, а при $k = 0$

$$\frac{\partial^{\mu}}{\partial z^{\mu}}(u - u_{\delta}) = \Pi \frac{\partial^{\mu-1}}{\partial \bar{z}^{\mu-1}} \left[\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right)_{\delta} \right].$$

Отсюда в силу (6) и ограниченности оператора Π ((¹), стр. 81) вытекает оценка (5). Теорема 3 доказана.

Будем считать теперь коэффициенты оператора (1) вещественными, а его порядок равным $m = 2\mu$. Пространство $L_2^{(s)}$ также будем считать состоящим из вещественных функций. В этом случае оператор A может быть записан в виде

$$Au \equiv \sum_{k, l=0}^{\mu} a_{kl} \frac{\partial^{\mu}}{\partial x^k \partial y^{\mu-k}} \frac{\partial^{\mu} u}{\partial x^l \partial y^{\mu-l}}, \quad (9)$$

где $a_{kl} = a_{lk}$ — постоянные.

Оператор (9) порождает следующий билинейный функционал над пространством $L_2^{(\mu)}$:

$$\langle u, v \rangle^{(A)} = \iint_E \sum_{k, l=0}^{\mu} a_{kl} \frac{\partial^{\mu} u(z)}{\partial x^k \partial y^{\mu-k}} \frac{\partial^{\mu} v(z)}{\partial x^l \partial y^{\mu-l}} dx dy,$$

где интеграл берется по всей плоскости.

Обозначим еще через $A_E L_2^{(\mu)}$ подпространство пространства $L_2^{(\mu)}$, состоящее из функций, являющихся решением уравнения $Au = 0$ во внутренней части множества E .

Решение $u_{f,E}^{(A)}(z) \in A_E L_2^{(\mu)}$ задачи Дирихле для уравнения $Au = 0$ и множества E при граничном условии $f(z) \in L_2^{(\mu)}$ определим соотношением

$$\langle u, f \rangle^{(A)} = \langle u, u_{f,E}^{(A)} \rangle^{(A)},$$

где $u(z)$ — произвольная функция из $A_E L_2^{(\mu)}$.

Это определение аналогично использованному в (⁴, ⁵). Можно показать, что оно согласуется с классическим. Переходя к оценке изменения решения задачи Дирихле для общего эллиптического оператора (9) при вариации области, отметим, что случай произвольной вариации области может быть сведен к случаю внешней вариации, когда $E \subset E_{\delta}$. На этом случае и остановимся.

Теорема 4. Пусть компакт E и открытое множество E_{δ} удовлетворяют условиям теоремы 1.

Тогда, каков бы ни был эллиптический оператор (9), справедливо неравенство

$$\|u_{f,E}^{(A)} - u_{f,E_{\delta}}^{(A)}\|_{L_2^{(\mu)}} \leq c_5 \omega_2^{(s)}(\delta) \delta^{s-\mu}, \quad (10)$$

где $s \geq \mu$, а $\omega_2^{(\mu)}(\delta)$ — модуль непрерывности s -го порядка функции $u_{f,E}^{(A)}(z)$.

Доказательство. По теореме 3 существует функция $u_{\delta}(z)$, удовлетворяющая в E_{δ} уравнению $Au_{\delta} = 0$ и такая, что

$$\|u_{f,E}^{(A)} - u_{\delta}\|_{L_2^{(\mu)}} \leq c_4 \omega_2^{(s)}(\delta) \delta^{s-\mu}. \quad (11)$$

Оператор P_E , соответствующий множеству E , определим равенством $P_E f = u_{f,E}^{(A)}$, $f \in L_2^{(\mu)}$.

Можно показать, что $u_{\delta} = P_{E_{\delta}} u_{\delta}$, $P_{E_{\delta}} f = P_{E_{\delta}} P_E f$.

Из этих соотношений вытекает, что

$$\|u_{\delta} - u_{f, E_{\delta}}^{(A)}\|_{L_2^{(\mu)}} \leq \|u_{\delta} - u_{f, E}^{(A)}\|_{L_2^{(\mu)}}. \quad (12)$$

Сопоставляя (11) и (12), приходим к оценке (10).

Таганрогский
радиотехнический институт

Поступило
21 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. ² Э. М. Саак, ДАН, 165, № 6, 1249 (1965). ³ Э. М. Саак, Укр. матем. журн., 18, № 6, 26 (1966).
⁴ Э. М. Саак, ДАН, 195, № 3, 564 (1970). ⁵ Э. М. Саак, ДАН, 198, № 4 (1971).