Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 3

УДК 517.947.42

МАТЕМАТИКА

Л. И. КАМЫНИН, Б. Н. ХИМЧЕНКО

О ПРИЛОЖЕНИЯХ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА К ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ 2-го ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 XI 1971)

В заметке авторов ([1]) с помощью принципа максимума были найдены необходимые и достаточные условия на границу области, при которых для регулярных решений эллиптико-параболических уравнений 2-го порядка имеют место теоремы типа Жиро — теоремы о знаке косой производной. Точнее, если регулярное решение эллиптико-параболического уравнения 2-го порядка достигает своего экстремального для рассматриваемой ограниченной области значения в граничной точке, удовлетворяющей условию строгой параболоидности изнутри (см. определения в ([1])), то при выполнении условий критерия авторов (см. теорему 1 в ([1])) производная от решения по любому внутреннему направлению в этой точке должна иметь определенный знак; если же условия критерия не выполнены, то для данного эллиптико-параболического уравнения можно построить (см. теорему 2 в ([1])) область такую, что в граничной точке достижения экстремума регулярным решением этого уравнения существует направление, вдоль которого производная решения обращается в нуль.

Таким образом, необходимость критерия, найденного авторами в ([1]) для эллиптико-параболического уравнения, установлена лишь в классе поверхностей. Возникает вопрос о возможности расширения класса поверхностей, для которых имеет место теорема о знаке косой производной, за счет сужения класса рассматриваемых уравнений эллиптико-параболического типа. В настоящей заметке указан критерий на границу области, при выполнении которого для решений параболических уравнений 2-го порядка (являющихся подклассом уравнений эллиптико-параболического типа) имеют место теоремы о знаке косой производной; при этом в расширенный класс поверхностей, для которых имеют место теоремы Жиро, входят при $n \geqslant 2$ поверхности типа $\text{Л}^{0,1,(1+\alpha)/2}_{1,\alpha,\alpha/2}$, $0 < \alpha \leqslant 1$ (см. определение в ([2])), а при $n = 1$ — кривые типа Жевре (см. ([3])). Доказательство критерия, как и в ([1]), использует принцип максимума и проводится методом барьеров.

Пусть $\bar{D} = D \cup \partial D$ — компактная область $(n+1)$-мерного $(n \geqslant 1)$ эвклидова пространства $E_{n+1} = \{(x, t)\}$, $(x, t) = (x_1, \ldots, x_n; t)$. Рассмотрим равномерно параболический в области D оператор

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (1)$$

где матрица коэффициентов $\|a_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, симметрическая, а действительные функции $a_{ij}(x, t)$, $a_i(x, t)$ и $c(x, t) \leqslant 0$ ограничены в области D.

Пусть, как и в ([1]), $\Pi(M^0, h)$ есть параболоид в E_{n+1}, т. е. тело, ограниченное поверхностью вращения $P(M^0, h)$ с вершиной в точке M^0 и основанием параболоида $B(M^0, h)$, лежащим в гиперплоскости, ортогональной оси вращения и отсекающем от оси вращения (считая от вершины M^0) отрезок длины h; при этом каноническое уравнение поверхности вращения $P(M^0, h)$ в местной декартовой системе координат $(\eta, \xi) = (\eta, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет вид

$$\eta = p(|\xi|), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant h. \tag{2}$$

где $|\xi| = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2)^{1/2}$, $p(s) = p_0 s\Omega(s)$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$, причем функция $\Omega(s)$ является модулем непрерывности для самой себя.

Обозначим теперь через $\Pi_1(M^0, h)$ тело, ограниченное поверхностью $P_1(M^0, h)$ и основанием $B_1(M^0, h)$, получающееся из параболоида $\Pi(M^0, h)$ заменой в каноническом уравнении (2) эвклидовой нормы $|\xi|$ на параболическую норму $|\xi|_p$, где $O\xi_n \| Ot$ и $|\xi|_p = (\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 + |\xi_n|)^{1/2}$. Тогда каноническое уравнение поверхности $P_1(M^0, h)$ в местной декартовой системе координат (η, ξ) примет вид

$$\eta = p_0 |\xi|_p \Omega(|\xi|_p), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant h. \tag{3}$$

Ось $O\eta$ по-прежнему будем называть осью тела $\Pi_1(M^0, h)$ и поверхности $P_1(M^0, h)$.

Определение. Пусть $M^0(x^0, t_0) \in \partial D$. Если существует замкнутое тело $\overline{\Pi}_p(M^0, h_0) = \overline{\Pi}_1(M^0, h_0 \cap \{t \leqslant t_0\}$ с вершиной в точке M^0 такое, что

$$\overline{\Pi}_p(M^0, h_0) \subset \overline{D} \quad (\overline{\Pi}_p(M^0, h_0) \subset \complement D),$$
$$\overline{\Pi}_p(M^0, h_0) \cap \partial D = \{M^0\}$$

и орт оси $M_p{}^0$ поверхности $P_p(M^0, h_0) = P_1(M^0, h_0) \cap \{t \leqslant t_0\}$ ортогонален оси Ot, т. е. $M_p{}^0 = \{\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n; 0\}$, то скажем, что точка $M^0 \in \partial D$ обладает по отношению к области D свойством строгой p-параболоидности изнутри (извне).

Теорема 1. *Пусть при $n \geqslant 1$ функция $u(x, t)$ такова, что*

$$u \in \mathrm{C}(\overline{D}); \ \frac{\partial u}{\partial x_i}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \ \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathrm{C}(D), \tag{4}$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

и для равномерно параболического оператора (1)

$$Lu(x, t) \leqslant 0, \quad (x, t) \in D.$$

Если $u(x, t)$ имеет отрицательный минимум μ в замкнутой области $\overline{D}$, то в силу принципа минимума $\exists$ $M^0(x^0, t_0) \in \partial D$ такая, что $u(M^0) = \mu < 0$. Пусть $\exists$ окрестность $O(M^0) \subset E_{n+1}$ такая, что $u(x, t) > \mu$ $\forall (x, t) \in O(M^0) \cap D$. Пусть точка $M^0 \in \partial D$ обладает относительно области D свойством строгой p-параболоидности изнутри, причем поверхность $P_p(M^0, h_0)$ имеет каноническое уравнение (3), *где функция $\Omega(s)$ удовлетворяет условиям:*

A) *$\Omega(s) \not\equiv 0$ на отрезке $[0, s_0]$ есть модуль непрерывности (для самой себя), выпуклый вверх на $[0, s_0]$ и дважды дифференцируемый на $(0, s_0)$;*
и

$$\omega(s) = \int_0^s z^{-1}\Omega(z)\,dz < +\infty, \quad s \in (0, s_0). \tag{5}$$

Тогда для любого направления с ортом $M^0 l = \{\cos\beta_1, \ldots, \cos\beta_n; 0\}$, внутренним для сечения $\Pi^p(M^0, h_0) \cap \{t = t_0\}$ (т. е. таким, что $0 \leqslant |\alpha_l| < {}^1/_2\pi$, где α_l — угол между ортами $M^0 p$ и $M^0 l$), существуют положитель-

ные постоянные γ_l *и* $h_l \in (0, h_0]$ *такие, что*

$$u(M) - u(M^0) \geqslant \gamma_l |M^0 M| \cos \alpha_l$$
$$\forall M \in \Pi_p(M^0, h_l) \cap \{t = t_0\}, \quad M^0 M \| M^0 l.$$

Замечание. Для того чтобы функция $\Omega(s) \not\equiv 0$ удовлетворяла условию А), необходимо и достаточно выполнения условий

$$\Omega(0) = 0, \tag{6}$$

$$\Omega(s) \in C([0, s_0]), \tag{7}$$

$$\Omega'(s) \geqslant 0, \quad s \in (0, s_0), \tag{8}$$

$$\Omega''(s) \leqslant 0, \qquad s \in (0, s_0); \tag{9}$$

при этом из условий (6) — (9) вытекают используемые в дальнейшем оценки

$$\Omega(s) > 0; \quad \Omega'(s) \leqslant s^{-1}\Omega(s), \quad s \in (0, s_0). \tag{10}$$

Следствие (теорема о знаке косой производной). *Для любого направления* $M^0 l$, *лежащего в гиперплоскости* $t = t_0$ *и такого, что* $0 \leqslant |\alpha_l| < {}^1/_2 \pi$, *при выполнении условий теоремы* 1 *имеем*

$$\frac{\partial}{\partial l} u(M^0) = \lim_{M \to M^0, M^0 M \,\|\, M^0 l} \frac{u(M) - u(M^0)}{|M^0 M|} > 0.$$

Замечание 1. Полученная теорема о знаке косой производной позволяет доказывать теоремы единственности решения II и III краевых задач для параболического уравнения 2-го порядка при менее обременительных, чем, например, в ([4]), ограничениях на границу ∂D области D.

Замечание 2. Если односвязная область $D \subset E_{n+1}$ заключена между двумя гиперплоскостями $t = 0$ и $t = T > 0$ и боковая часть ее параболической границы $\Gamma = \partial D \cap \{0 < t < T\}$ при $n \geqslant 2$ есть поверхность типа $Л^{0,1,(1+\alpha)/2}_{1,\alpha,\alpha/2}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, а при $n = 1$ есть кривая Жевре, то любая точка $M \in \Gamma$ обладает свойством строгой p-параболоидности относительно области D как изнутри, так и извне, и для поверхности $\Gamma \subset \partial D$ выполнены все условия теоремы 1 (в каноническом уравнении (3) нужно при этом положить $\Omega(s) = s^\alpha$).

Теорема 2. *Пусть при* $n \geqslant 1$ *функция* $u(x, t)$ *удовлетворяет* (4) *и*

$$Lu(x, t) = f(x, t) \leqslant 0, \quad (x, t) \in D, \tag{11}$$

где Lu *— равномерно параболический в* D *оператор из* (1) *и*

$$|f(x, t)| \leqslant F, \quad (x, t) \in D, \quad F > 0 \text{ — постоянная.}$$

Пусть $u(x, t)$ *имеет отрицательный минимум* μ *в области* $\overline{D}$ *и* $u(M^0) = \mu < 0$ *для* $M^0(x^0, t_0) \in \partial D$. *Пусть точка* $M^0 \in \partial D$ *обладает относительно области* D *свойством строгой* p*-параболоидности изнутри, причем поверхность* $P_p(M^0, h_0)$ *имеет каноническое уравнение* (3), *где функция* $\Omega(s)$ *удовлетворяет условию* А), *а также условиям*

$$p''(s) \geqslant 0, \quad s \in (0, s_0),$$

$$s^\alpha = o(\Omega(s)), \ s \to +0, \quad \forall \alpha \in (0, 1],$$

и вместо условия Дини (5) *— условию*

$$\int_0^{s_0} z^{-1} \Omega(z)\, dz = +\infty.$$

Пусть существует окрестность $O(M^0) \subset E_{n+1}$, *для которой в местной системе координат* (η, ξ) *уравнение куска поверхности* $\Gamma = \partial D \cap O(M^0) \cap$

$\cap \{t \leqslant t_0\}$ *имеет вид* (3), *и существует линейная функция*

$$l(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i$$

(*где* α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$,— *постоянные*) *такая, что* $\forall M(\eta, \xi) \in \Gamma$

$$|u(M) - l(M) - \mu| \leqslant p(|\xi|_p) \exp\left\{- \int\limits_{\sqrt{\eta^2+|\xi|_p^2}}^{s_0} z^{-1}\Omega(z)\, dz\right\}. \qquad (12)$$

Тогда существуют положительные постоянные γ_1, γ_2 *и* h, $0 < h \leqslant h_0$, ***такие, что***

$$0 \leqslant u(M) - \mu \leqslant \gamma_1 |M^0M| \exp\left\{-\gamma_2 \int\limits_{\eta}^{s} z^{-1}\Omega(z)\, dz\right\}$$

$$\forall M(\eta, 0) \in \Pi_p(M^0, h) \cap \{t = t_0\}, \quad M^0M \parallel M_p^0.$$

Замечание 3. Из теоремы 2 следует, что необходимость критерия (5) установлена лишь в классе граничных поверхностей ∂D.

Замечание 4. Теорема 2 по формулировке носит условный характер, однако при достаточной гладкости коэффициентов уравнения (11) всегда существует (см., например, ([4])) решение I краевой задачи для уравнения (11), удовлетворяющее условию (12) теоремы 2.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко, ДАН, 200, № 2, 282 (1971). [2] Л. И. Камынин, Дифференциальные уравнения, 1, № 6, 799 (1965). [3] M. Gevrey, J. math. pures et appl., 9, № 1—4, 305 (1913). [4] А. Фридман, Уравнения с частными производными параболического типа, М., 1968.