Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 3

УДК 511.26 *МАТЕМАТИКА*

А. А. КАРАЦУБА

ПРОБЛЕМА ДЕЛИТЕЛЕЙ ДИРИХЛЕ В ЧИСЛОВЫХ ПОЛЯХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 6 XII 1971)

Обозначения. $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, не всегда одно и то же; $P_k(x)$ — многочлен от x степени не выше k и в разных теоремах, вообще говоря, разный; c, c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 — положительные абсолютные постоянные.

В 1849 г. Дирихле ([1]) доказал следующее

Утверждение A. *Пусть $\tau_k(n)$ — число решений в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_k$ уравнения $x_1x_2\ldots x_k = n$.*

Тогда

$$\sum_{n\leqslant x} \tau_k(n) = xP_{k-1}(\log x) + O(x^{\alpha_k+\varepsilon}),$$

где $\alpha_k \leqslant 1 - 1/k$.

Проблема делителей Дирихле состоит в том, чтобы для величины α_k в утверждении A найти наилучшее значение.

В 1903 г. Вороной ([2]) и в 1912 г. Ландау ([3]) доказали, что

$$\alpha_k \leqslant 1 - \frac{2}{k+1}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots,$$

а в 1922 г. Харди и Литтлвуд ([4]) уточнили эту оценку при $k \geqslant 4$:

$$\alpha_k \leqslant 1 - \frac{3}{k+2}, \quad k = 4, 5, \ldots$$

При больших значениях k оценки Вороного — Ландау — Харди — Литтлвуда принципиально не отличаются от оценки Дирихле и имеют вид

$$\alpha_k \leqslant 1 - c/k.$$

В работе ([5]) автор доказал, что для величины α_k справедлива оценка

$$\alpha_k \leqslant 1 - c_0k^{-2/3}.$$

Теоремы 1 — 4 настоящей статьи в такой же мере улучшают соответствующие результаты Ландау 1912 г. (см. ([3])), в какой оценка автора ([5]) величины α_k улучшила прежние результаты Дирихле — Вороного — Ландау — Харди — Литтлвуда. Доказательства теорем 1—4 аналогичны доказательству теоремы 5 из ([5]); в соответствующем месте надо только применить оценки L-рядов Дирихле в окрестности прямой $\operatorname{Re} s = 1$, которые получаются методом тригонометрических сумм И. М. Виноградова ([6]) (см. также доказательство теоремы 3 в ([5])).

Теорема 1. *Пусть $L_1(s), \ldots, L_k(s)$ — L-ряды Дирихле с характерами $\chi_1 \bmod D_1, \ldots, \chi_k \bmod D_k$, и при $\operatorname{Re} s > 1$ пусть*

$$L_1(s)\ldots L_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}.$$

Тогда

$$\sum_{n\leqslant x} c_n = \delta x P_{k-1}(\log x) + O(x^{1-c_1k^{-2/3}+\varepsilon}),$$

где

$$\delta = \delta(\chi_1, \ldots, \chi_k) = \begin{cases} 1, \text{ если } \chi_j = \chi_0 \text{ при некотором } j,\ 1 \leqslant j \leqslant k; \\ 0, \text{ если } \chi_j \neq \chi_0 \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant k. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть $m > 1$ натуральное, $K = R(\zeta)$, $\zeta^m = 1$, и $\mathfrak{A}$ — целые дивизоры поля K.*

Тогда

$$\sum_{N(\mathfrak{A}) \leqslant x} 1 = \alpha x + O(x^{1-c_3 h^{-2/3+\varepsilon}}),$$

где $h = \varphi(m)$, $\alpha = \alpha(K) > 0$.

Теорема 3. *В обозначениях теоремы 2 при любом натуральном k имеем*

$$\sum_{N(\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_k) \leqslant x} 1 = x P_k(\log x) + O(x^{1-c_3 (hk)^{-2/3+\varepsilon}}).$$

Теорема 4. *Пусть D — бесквадратное число, $K = R(\sqrt{D})$ и $\mathfrak{A}$ — целые дивизоры поля K.*

Тогда при любом натуральном k имеем

$$\sum_{N(\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_k) \leqslant 1} 1 = x P_k(\log x) + O(x^{1-c_4 k^{-2/3+\varepsilon}}).$$

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
22 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. G. Dirichlet, Abh. Akad. Berlin (Werke, 2, 49—66), 1849, Math. Abh., S. 69. [2] G. Voronoi, J. Math., **126**, 241 (1903). [3] E. Landau, Nachr. Konigl. Gesell Wiss. Gottingen. Math.-phys. Klassen, H. 6, 1912, S. 687. [4] G. H. Hardy, I. E. Littlewood, Proc. London Math. Soc. (2), 21, 39 (1922). [5] А. А. Карацуба, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **112**, 1, 241 (1971). [6] И. М. Виноградов, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971.