

С. Д. КЛЯЧКО

ЭКВИАРЕАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО И ВЯЗКО-УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 17 XI 1971)

В статье показывается, что преобразования с одинаковым во всех точках коэффициентом изменения площади переводят задачу кручения неоднородного анизотропного стержня в себя (но уже с новыми контуром, анизотропией и неоднородностью). При этом очень важно, что величины, которые перед решением «повой» задачи должны быть известны — контур, характеристики материала, угол закручивания или крутящий момент, — просто выражаются через соответствующие величины исходной задачи. Поэтому данные преобразования можно использовать для моделирования. В частных случаях неоднородный анизотропный стержень сводится к однородному изотропному, что существенно облегчает экспериментальное исследование на модели. Применительно к линейно упруго-вязкому стержню данное утверждение доказано в работе (1). В настоящей статье это доказывается для нелинейно упругого, упруго-пластического и нелинейно упруго-вязкого материалов.

1. Рассмотрим задачу кручения призматического стержня с произвольным поперечным сечением (для простоты считаем его односвязным). Материал стержня однороден по длине и неоднороден в поперечном сечении.

Направим ось x_3 параллельно образующей поверхности стержня, а через x_1, x_2 обозначим пока ортонормированную систему координат в поперечном сечении.

Известно, что для многих упругих, упруго-пластических и вязко-упругих материалов в этой задаче все деформации и напряжения, кроме $\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$, равны нулю. Это справедливо, например, если материал в каждой точке имеет плоскость упругой, упруго-пластической или упруго-вязкой симметрии, перпендикулярную образующей, а связь между деформациями и напряжениями описывается следующими простыми и часто применяемыми вариантами: закона нелинейной упругости

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijk} \sigma_{kl} + A_{ijklm} \sigma_{kl} \sigma_{mn} + \dots, \quad i, j, \dots = 1, 2, 3, \quad (1)$$

деформационной теории пластичности типа (1), теории течения типа

$$d\varepsilon_{ij} = B_{ijkl} d\sigma_{kl} + F(h) \frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} dh, \quad (2)$$

$$h = {}^{1/2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl},$$

и теории нелинейной вязко-упругости типа (1), если под A_{ijk} понимать линейный, а под A_{ijklm} и т. д. — нелинейные интегральные операторы.

Отличные от нуля $\varepsilon_{13} = \varepsilon_i$ и $\sigma_{13} = \sigma_i$ (здесь и в дальнейшем $i, j = 1, 2$) удовлетворяют уравнению равновесия, совместности и уравнениям связи, которые запишем в общем виде:

в случае нелинейно упругого материала

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(\sigma_1, \sigma_2) \equiv \varepsilon_i(\sigma_j), \quad (3)$$

в случае упруго-пластического и вязко-упругого

$$\varepsilon_i(t) = \varepsilon_i \left[\sigma_j(\tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \quad (4)$$

Здесь t — скалярный параметр или время и $\varepsilon_i \left[\cdot \right]_{\tau=0}^{\tau=t}$ — оператор, ставящий в соответствие функции $\sigma_i(t)$ функцию $\varepsilon_i(t)$.

Безусловно к такой постановке задача кручения сводится для гораздо более широкого класса материалов, чем приведенные выше примеры. Дальнейшее будет справедливо для всех материалов, сводящихся к данной постановке.

Введем произвольные криволинейные координаты x^1, x^2 и запишем уравнения задачи и граничные условия в ковариантной относительно произвольного преобразования координат форме

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} \sigma^i) = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} \lambda^{ij} \varepsilon_j) = \alpha = \text{const}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(\sigma^j), \quad \varepsilon_i(t) = \varepsilon_i \left[\sigma^j(\tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=t},$$

$$\lambda^{11} = \lambda^{22} = 0, \quad \lambda^{12} = -\lambda^{21} = 1/\sqrt{g}, \quad g = \det |g_{ij}|;$$

на контуре $\gamma(x^i) = 0$ имеет место

$$\sigma^i \partial \gamma / \partial x^i = 0. \quad (6)$$

Сделаем преобразование координат

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2) \equiv \bar{x}^i(x^j). \quad (7)$$

Из (5) легко усматривается, что если (7) подчинить условию

$$\bar{g}(\bar{x}^i) / g(\bar{x}^i) = a = \text{const} \quad (8)$$

и на преобразования остальных величин, ковариантные (7), наложить очень незначительные дополнительные преобразования, получим переход к задаче кручения нового стержня, записанной в старой системе координат. Величины, относящиеся к новому стержню, будем обозначать черточкой. Преобразование (7) будет уже иметь смысл перехода к новой точке в старой системе координат.

Напряжения, деформации и функция напряжений Φ ($\sigma^i = \lambda^{ij} \partial \Phi / \partial x^j$) в соответственных точках нового и старого стержней связаны соотношением

$$\bar{\sigma}^i = \sqrt{a} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \sigma^j, \quad \bar{\varepsilon}_i = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \varepsilon_j, \quad \bar{\Phi} = \Phi, \quad (9)$$

физические свойства материалов связаны соотношением

$$\bar{\varepsilon}_i(\bar{\sigma}^j) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} e_k \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \bar{\sigma}^j \right), \quad (10)$$

$$\varepsilon_i \left[\bar{\sigma}^j(\tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} e_k \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \bar{\sigma}^j(\tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=t}, \quad (11)$$

угол закручивания и крутящий момент

$$\bar{\alpha} = \alpha, \quad \bar{M} = M / \sqrt{a}. \quad (12)$$

Контур нового стержня описывается уравнением

$$\gamma(x^i(\bar{x}^j)) \equiv \bar{\gamma}(\bar{x}^j) = 0.$$

Если исходную систему координат выбрать так, что $g = \text{const}$, то (8) эквивалентно уравнению

$$\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2) / \partial(x^1, x^2) = 1/\sqrt{a} = \text{const}, \quad (13)$$

решение которого в параметрической форме известно.

Таким образом, если нам задан конкретный неоднородный анизотропный стержень и в нем необходимо определить, например экспериментально, σ^i , ε_i или φ и если по каким-то причинам это неудобно делать на заданном стержне, мы имеем право согласно (8) или (13) выбрать любой стержень, получающийся из заданного под действием преобразования с постоянным коэффициентом изменения площади ($d\bar{S}/dS = 1/\sqrt{a}$), провести на нем исследование, а затем результаты пересчитать на исходный стержень.

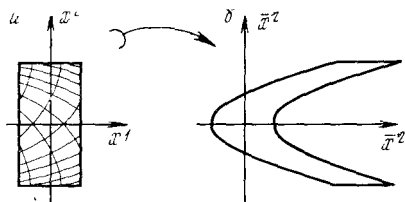


Рис. 1

2. Приведем пример, когда задача кручения неоднородного анизотропного упруго-пластического стержня сводится к задаче кручения однородного изотропного стержня. В примере будем пользоваться ортонормированной системой координат. Пусть имеется стержень (рис. 1 а) прямоугольного поперечного сечения ($x^1 = \pm 1$, $x^2 = \pm 2$), изготовленный из материала, подчиняющегося варианту теории течения

$$d\varepsilon_i = B_{ij}^+ d\sigma^j + F^+(h^+) \frac{\partial h^+}{\partial \varepsilon^i} d\varepsilon^i, \quad (14)$$

$$h^+ = 1/2 C_{ij}^+ \sigma^i \sigma^j;$$

пусть

$$B_{11}^+ = B, \quad B_{22}^+ = B[4(x^2)^2 + 1], \quad B_{12}^+ = B \cdot 2x^2, \quad C_{ij}^+ = (C/B) B_{ij}, \quad (15)$$

и пусть $F^+(\cdot)$ будет произвольной функцией своего аргумента.

Легко убедиться, что преобразование

$$\bar{x}^1 = x^1 + (x^2)^2, \quad \bar{x}^2 = x^2 \quad (16)$$

сводит эту задачу к задаче кручения однородного изотропного стержня. Из «общего» соотношения (11) или из непосредственной подстановки преобразования (9) в (14) получим, что материал нового стержня подчиняется закону теории течения

$$d\bar{\varepsilon}_i = B \delta_{ij} d\bar{\sigma}^j + \bar{F}^+(\bar{h}^+) \frac{\partial \bar{h}^+}{\partial \bar{\varepsilon}^i} d\bar{\varepsilon}^i, \quad (17)$$

$$\bar{h}^+ = 1/2 C [(\bar{\sigma}^1)^2 + (\bar{\sigma}^2)^2], \quad \bar{F}^+(\bar{h}^+) = F^+(h^+).$$

Контур поперечного сечения нового стержня (рис. 1б) — параболический четырехугольник ($\bar{x}^1 = (\bar{x}^2)^2 \pm 1$, $\bar{x}^2 = \pm 2$). Угол закручивания и крутящий момент нового стержня являются такими же функциями параметра t , как и у исходного стержня. После эксперимента остается только перейти по зависимости (9) к величинам исходного стержня.

Подчеркнем, что форма, материал и нагрузка на модель определяются по форме, материалу и нагрузке на натуру до решения натурной задачи. Именно поэтому рассматриваемые в статье преобразования могут использоваться для моделирования.

Заметим, что примеров, аналогичных описанному, можно привести много.

3. В заключение рассмотрим следующее. Полиа (2) доказал теорему о том, что для однородного изотропного линейно-упругого материала и односвязной области среди всех стержней с одинаковой площадью поперечного сечения наибольшей жесткостью на кручение обладает стержень с кру-

говым поперечным сечением. (Заметим, что легко доказуемы некоторые обобщения этой теоремы на упруго-пластические, вязко-упругие и анизотропные стержни.)

На основании результатов данной работы теорему Поля можно «дополнить» в следующем смысле. Возьмем однородный линейно-упругий изотропный круговой стержень. Будем преобразованиями, якобиан которых в ортонормированной системе координат равен 1, т. е. преобразованиями, сохраняющими площадь во всех точках, получать новые стержни. Если при этом менять компоненты тензора упругих коэффициентов B_{ij}^+ ($\varepsilon_i = B_{ij}^+ \sigma^j$) так, как они менялись бы при преобразовании координат, крутильная жесткость стержня сохраняется постоянной. Заметим, однако, что жесткость можно сохранять не только таким способом.

Сохранение жесткости поперечных сечений при эквиареальных преобразованиях и соответствующем преобразовании физических характеристик имеет место для всех рассмотренных в настоящей статье материалов.

Автор выражает благодарность А. Я. Александрову за советы.

Новосибирский институт
инженеров железнодорожного транспорта

Поступило
16 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Д. Клячко, ДАН, 198, № 3, 547 (1971). ² G. Pólya, Quart. Appl. Math., 6, 267 (1948).