Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 1

УДК 532 **ГИДРОМЕХАНИКА**

Л. М. АЛЕКСЕЕВА

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОРОДНОГО СПИРАЛЬНОГО ПОТОКА ОТНОСИТЕЛЬНО ВРАЩАТЕЛЬНОГО САМОВОЗБУЖДЕНИЯ

(Представлено академиком М. Д. Миллионщиковым 14 IV 1971)

Как показано в ([1]), небольшое искажение цилиндрически-симметричного потока маловязкой жидкости может привести к неустойчивости, при которой возмущение обладает цилиндрически-симметричной составляющей. При этом требуется, чтобы отношение амплитуды искажения к скорости основного потока превышало некоторую минимальную безразмерную величину $\Gamma_{\min}$, характерную для данного цилиндрического течения. В этом есть известная аналогия с задачей Рэлея о бенаровских ячейках, когда определяется минимальное число Рэлея, при превышении которого возникает неустойчивость.

Для определения $\Gamma_{\min}$ нужно задать цилиндрический поток $\mathbf{v}_0(r)$ и по линеаризованному уравнению Эйлера рассчитать его винтовое искажение $\mathbf{v}'(r, \gamma)$ (обозначения здесь те же, что и в ([1])). В настоящей работе рассчитано $\Gamma_{\min}$ для самого простого случая «твердотельного» движения жидкости в круглой трубе радиуса R, когда $\mathbf{v}_0 = \omega r \mathbf{e}_\varphi + v_z \mathbf{e}_z$, где ω и v_z — постоянные величины.

Будем считать, что $l = 1$ и $\alpha = -k$, при этом шаг разыскиваемого искажения будет равен $2\pi / \alpha$. Наперед заданные $v_\varphi = \omega r$ и $v_z = \mathrm{const}$ удобно записать через α и параметр μ, который зависит от α, т. е. $v_\varphi = \omega r$; $v_z = \omega(2\mu + 1) / \alpha$. При этом искажение $v' \sim e^{im\gamma}$ определится из уравнения (10) ([1]), которое для нормированной на единицу функции χ_m будет иметь вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{1+\alpha^2 r^2}\frac{\partial}{\partial r}\chi_m + \left[\frac{\alpha^2}{\mu^2(1+\alpha^2 r^2)} - \frac{2\alpha^2}{\mu(1+\alpha^2 r^2)} - \frac{m^2}{r^2}\right]\chi_m = 0$$

с граничным условием $\chi_m(R) = 0$. Точное решение этого уравнения было найдено Л. С. Соловьевым ([2]):

$$\chi_m = \frac{J_m(\varkappa r) - \mu\varkappa r J_m'(\varkappa r)}{J_m(\varkappa r_*) - \mu\varkappa r_* J_m'(\varkappa r_*)}, \quad \varkappa^2 = \alpha^2(\mu^{-2} - m^2),$$

где $J_m(\varkappa r)$ — функция Бесселя m-го порядка. В дальнейшем положим $\varkappa r = x$. Граничное условие выполняется, когда $\varkappa R = x^{(i)}$ ($x^{(i)}$ — значение (i)-го узла функции χ_m). При заданных ω и v_z это условие однозначно определяет набор возможных шагов ($\alpha_i^{-1} 2\pi$) для поля искажения

$$\alpha^2(\mu^{-2} - m^2)R^2 = x^{(i)2}, \quad 2\mu = \alpha v_z \omega^{-1} - 1.$$

Система (13) в ([1]), определяющая симметричные функции потока возмущения h_0, H_0, p_0, имеет простой вид:

$$r\sigma h_0 - \nu r\left[(1+\alpha^2 r^2) L h_0 - \frac{2\alpha}{1+\alpha^2 r^2} p_0\right] = \frac{\nu}{4\omega}\frac{(x v_r u_r)_*}{m^2\varkappa\mu^2}\left(\frac{\sigma}{\nu} + 2\frac{\alpha^2}{\mu^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\chi_m^2,$$

$$-r\sigma \dot{H}_0 + \nu r p_0 = \frac{\nu}{2\omega}\frac{(x v_r u_r)_*}{m^2\varkappa\mu^3}\left(\frac{\sigma}{\nu} + 2\frac{\alpha^2}{\mu^2}\right)\chi_m^2,$$

$$(1+\alpha^2 r^2) L H_0 + \frac{2\alpha}{1+\alpha^2 r^2} h_0 = p_0.$$

Из критерия устойчивости (14) работы ([1]) видно, что нарастающие возмущения с $\sigma > 0$ будут иметь место при больших значениях дестабилизирующего фактора $v'/v_0 \sim \varepsilon^{1/2}$, чем нейтральные возмущения с $\sigma = 0$. Для $\sigma = 0$ найдем симметричную часть возмущения $\mathbf{u}_0$:

$$u_{0\varphi} = (v_r' u_r')_* (Q_\varphi + \Omega r), \quad u_{0z} = (v_r' u_r')_* (Q_z + p_1 + p_2 r^2),$$

где

$$Q_\varphi = \frac{x_*^2 \alpha^4}{\omega \mu^5 \varkappa^2 m^2}\left[\frac{\mu}{2}\frac{x}{\beta} Y_1 - \frac{Y_2}{x}\right], \quad Q_z = \frac{x_*^2 \alpha^3}{2\omega m^2 \varkappa \mu^4}\left[\frac{2\nu}{\mu} Y_2 + \frac{1}{\beta} Y_1\right];$$

$$\beta = 1 + \alpha^2 r^2, \quad \nu = \mu^{-2} - m^2;$$

$$Y_1 = \frac{4\nu}{\mu} L_1 + L_2, \quad Y_2 = \mu\left[\frac{4\nu}{\mu} L_3 + L_4\right] - L_5;$$

$$L_1 = \int \frac{\beta}{x} dx \int \frac{x}{\beta^2} dx \int \frac{\chi^2(x)}{x} dx, \quad L_2 = \int \frac{\beta}{x} dx \left[\frac{\chi^2(x)}{\beta} + 2\nu \int \frac{x}{\beta^2} \chi^2 \, dx\right],$$

$$L_3 = \int \frac{x}{\beta^2} L_1 \, dx, \quad L_4 = \int \frac{x}{\beta^2} L_2 \, dx, \quad L_5 = \int \frac{x}{\beta} dx \int \frac{\chi^2(x)}{x} dx;$$

Ω, p_1 и p_2 — постоянные интегрирования. Мы подберем их так, чтобы $u_{0\varphi}$ и u_{0z} обращались в нуль на границе.

Как уже отмечалось, Q_φ и Q_z не должны выходить за пределы нулевого порядка по ε, т. е.

$$\varepsilon^{1/2 - \delta} < Q_\varphi, \quad Q_z < \varepsilon^{-1/2 + \delta}, \quad \delta > 0.$$

На ЭВМ были вычислены $Q_\varphi(R)$ и $Q_z(R)$ для $m = 1, 2$ и различных μ (рис. 1). Оказалось, что наименьшими Q_φ и Q_z обладают первые узлы функций χ при $m = 1$, $\mu = -0{,}6$. Вращательная неустойчивость наступит при $\varepsilon < Q_\varphi^{-2}$, Q_z^{-2}, то есть при $\omega R^2 \nu \gtrsim 1200$; к.п.д. динамо равен $u_{0\varphi}/u' \sim \varepsilon^{1/2} \approx 1/35$. На рис. 2 изображена зависимость $u_{0\varphi}(r)$ для $\mu = -0{,}6$. При $\alpha \to 0$ и $\alpha \to \infty$, что соответствует аксиально-симметричным и плоским возмущениям, $\mu \to 0$ и $\mu^2 \to 1/m^2$. В обоих случаях $Q_\varphi \to \infty$ и возмущение будет незатухающим только при $\varepsilon \to 0$. Но при этом к.п.д. динамо-механизма равно нулю. Таким образом, в случае аксиальной и плоской симметрии динамо-механизм не действует. Это заключение является жидкостным аналогом теоремы Каулинга для электромагнитного динамо.

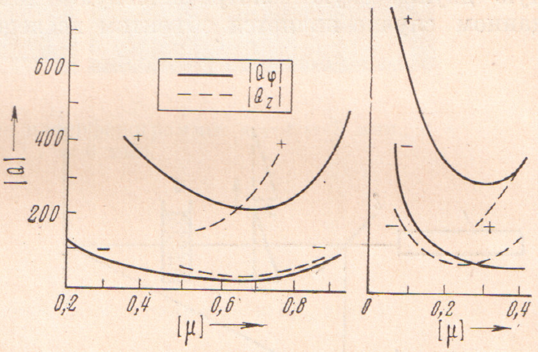

Рис. 1. Зависимость $|Q_\varphi|$ и $|Q_z|$ от $|\mu|$ (плюс относится к $\mu > 0$; минус — к $\mu < 0$). Слева: $m = 1$, справа: $m = 2$

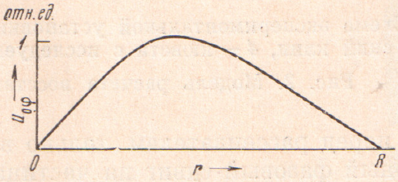

Рис. 2. Зависимость $u_{0\varphi}(r)$

Научно-исследовательский институт
ядерной физики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. М. Алексеева, ДАН, 200, № 6 (1971). [2] Л. С. Соловьев, Сборн. Вопросы теории плазмы, в. 3, 1963.