Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 4

УДК 535 + 530.145

ФИЗИКА

М. Е. ПЕРЕЛЬМАН, Г. М. РУБИНШТЕЙН

О ПОСТРОЕНИИ ТЕОРИИ ДИСПЕРСИИ НА ОСНОВЕ ПОНЯТИЯ ВРЕМЕНИ ЗАДЕРЖКИ

(Представлено академиком А. Д. Сахаровым 14 VII 1971)

В настоящей работе сделана попытка построения общей теории дисперсии, пригодной как для изучения рассеяния фотонов, так и для задач электронной и нейтронной оптики.

Наши построения основываются на интуитивно очевидной идее о связи показателя преломления со временем задержки рассеиваемых частиц (в том числе и фотонов) при прохождении потока частиц через слой вещества. Время задержки в каждом элементарном акте рассеяния связано с S-матрицей рассеяния ([1]):

$$\tau = \mathrm{Re}\left(\frac{d}{i\,d\omega}\right)\ln S. \tag{1}$$

Величину τ в (1) можно выразить через наблюдаемые спектроскопические величины и отсюда определить групповую скорость частиц, а затем и сам показатель преломления.

Построенный таким образом показатель преломления оказывается выраженным через S-матрицу и, вообще говоря, схож с известной формулой Лорентца

$$\tilde{n} = 1 - \rho T\,/\,(kj), \tag{2}$$

где ρ — плотность атомов рассеивателя, j — плотность потока рассеиваемых частиц, T — диагональный элемент S-матрицы.

1. С длительностью задержки при рассеянии можно связать величину групповой скорости частиц $v_{\text{гр}}$ (в том числе фотонов) или величину

$$n'(\omega,\ \mathbf{k},\ j) = c\,/\,v_{\text{гр}}(\omega,\ \mathbf{k},\ j) = c\,dk\,/\,d\omega, \tag{3}$$

где ω и $\mathbf{k}$ — частота и волновой вектор соответственно. Но отсюда

$$\omega(\mathbf{k}) = c\int_0^k dk/n'(k) \quad \text{или} \quad n = k\Bigg/\int_0^k \frac{dk}{n'(k)}\,. \tag{4}$$

Определим теперь величину n'. Если излучение проходит путь L, то

$$c = L\,/\,t, \qquad v_{\text{гр}} = L\,/\,(t+T), \tag{5}$$

где T — время задержки каждой из рассеиваемых частиц, определяемое по числу рассеяний и времени задержки в единичном акте рассеяния τ:

$$T = m(L)\tau = \tau L\,/\,l = \rho\sigma L\tau; \tag{6}$$

здесь l — длина свободного пробега, ρ — плотность рассеивателей, σ — сечение упругого рассеяния. Подстановка (5), (6) в (3) приводит к основной формуле

$$n' = 1 + c\rho\sigma\tau, \tag{7}$$

дающей вдали от резонанса величину n (введение вместо ρ тензора плотностей выявляет тензорный характер n' и, более сложным образом, тензорные свойства n).

Имея в виду рассеяние на связанном электроне, можно выбрать сечение в форме Крамерса — Гайзенберга (или Брейта — Вигнера):

$$\sigma = \frac{2j_f+1}{2(2j_i+1)}\,\frac{4\pi c^2}{\omega^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma_l^2}{(\omega-\omega_l)^2+{}^1\!/\!_4\Gamma_l^2}, \tag{8}$$

для времени задержки можно взять

$$\tau(\omega) = \frac{1}{\omega} + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{{}^1\!/\!_2\Gamma_l}{(\omega-\omega_l)^2+{}^1\!/\!_4\Gamma_l^2}, \tag{9}$$

подстановка которых в (7) и (4) дает искомые соотношения для n.

2. Формула (7) написана для однокомпонентного вещества. В случае многокомпонентной смеси (под компонентами могут, в частности, пониматься атомы одного и того же сорта, но находящиеся в разных энергетических состояниях) вместо (7) необходимо писать

$$n' = 1 + c\sum_i \rho_i\sigma_i\tau_i \equiv \sum \alpha_i n_i', \tag{10}$$

где $\alpha_i = \rho_i/\rho$ — доля i-го типа рассеивателя ($\sum\alpha_i = 1$).

Вдали от резонанса, очевидно (2),

$$n = \sum \alpha_i n_i, \tag{11}$$

а вблизи резонанса надо пользоваться более сложным соотношением

$$n = k \Big/ \int \frac{dk}{\sum \alpha_i n_i'(k)}$$

и нельзя установить простого соответствия между n и n_i. Однако в области, где условия резонанса выполняются лишь для одной компоненты, например, первой, (10) можно — очень приближенно — переписать как

$$n \approx \alpha_1 k\left(1+\sum_2^N \frac{\alpha_i n_i}{\alpha_1 n_1'}\right) \Big/ \int \frac{dk}{n_1'(k)}.$$

Эти формулы обобщают соотношения, используемые в молекулярной теории рефракции, и еще более осложняют тензорные свойства n, а также зависимость n от пространственной дисперсии.

Все соотношения были получены, вообще говоря, без учета термодинамических факторов. Строго говоря, ρ, σ, τ зависят от температуры, давления, электрического и магнитного полей, так как от них зависят энергии и ширины уровней, их заселенности. Изменения Γ_i и ω_i под влиянием этих факторов (т. е. эффектов Допплера, Штарка, Фарадея) можно учесть непосредственно в формулах (8), (9). Эффекты, связанные с заселенностью уровней, можно учесть выражением α_i в (10) через распределение Больцмана:

$$n' = 1 + c\rho\sum_i e^{-\beta E_i}\sigma_i\tau_i.$$

В газе и жидкости добавочная температурная зависимость может быть учтена использованием уравнения состояния

$$n' = 1 + c\beta p\sum_i e^{-\beta E_i}\sigma_i\tau_i,$$

где p — давление и т. п.

3. Выведем основное соотношение (7) для n вдали от резонанса иными способами.

Воспользуемся приближением эйконала и будем близко следовать рассуждениям Гольдберга и Ватсона (3) (метод расчета покажет, что полученные результаты применимы к задачам рассеяния частиц любого сорта).

При рассеянии на гладком потенциале гриновская функция удовлетворяет уравнению

$$[\Delta + k^2 - 2MV(\mathbf{r})]G^{(+)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = M\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{12}$$

где M — приведенная масса и $|V(\mathbf{r})| \ll k^2/2M$. Решение уравнения (12) ищем в виде

$$G^{(+)}(\mathbf{r}) = -\frac{M}{2\pi}\frac{\exp(i\varphi)}{|\mathbf{r}|}, \quad \varphi = \int_0^{|\mathbf{r}|} p(x)\,ds. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12) получаем при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$, что

$$p(\mathbf{r}) = [k^2 - 2MV(\mathbf{r})]^{1/2} \approx k - \frac{MV(\mathbf{r})}{k}, \tag{14}$$

точка сингулярности в (12) не отражается на этом результате.

После рассеяния волна может быть описана как

$$\psi^+ = \psi_0 + \hat{\mathbf{K}}\varphi_0, \qquad \varphi_0 = (2\pi)^{-3/2}\exp(i\mathbf{kr}),$$

$$\hat{\mathbf{K}}\varphi_0 = \int d\mathbf{r}' G^{(+)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')V(\mathbf{r}')\varphi_0(\mathbf{r}'). \tag{15}$$

Учет лишь основных вкладов в (15) дает, что

$$\hat{\mathbf{K}}\varphi_0 \approx (2\pi)^{-3/2}(e^{i\Delta\varphi(\mathbf{r})} - 1)e^{i\mathbf{kr}},$$

или, окончательно,

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{r}} [p(x) - k]\,dx, \quad \psi^+ = (2\pi)^{-3/2}\exp(i\mathbf{kr} + i\Delta\varphi), \tag{16}$$

а интегрирование идет по прямой, параллельной $\mathbf{k}$. При принятых приближениях, в соответствии с (14),

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = MVL/k,$$

где L — путь, пройденный в рассеивателе.

С другой стороны, для волны, прошедшей через рассеиватель без отклонений, можно написать, что

$$\psi^+ = (2\pi)^{-3/2}\exp\{ik(x-L) + inkL\}. \tag{17}$$

Сравнение (16) и (17) приводит к соотношению

$$n - 1 = MV/k^2. \tag{18}$$

Легко показать ([3]), что длина свободного пробега может быть выражена любой из двух формул $l = k/(2MV)$ или $l = 1/(\rho\sigma)$, что позволяет записать (18) в форме (7), где $\tau = 1/\omega$.

Качественную проверку наших построений можно также провести, вычислив независимо показатель преломления с помощью дисперсионных соотношений Крамерса — Кронига. Действительная и мнимая части показателя преломления связаны с амплитудой рассеяния соотношениями

$$\operatorname{Re} U = (n-1)\omega^2/(2\pi\rho c^2), \quad \operatorname{Im} U = \omega\sigma/(4\pi c).$$

Предположив, что для амплитуды рассеяния выполняется соотношение Гильберта, и используя для сечения одиночную резонансную формулу Крамерса — Гайзенберга, получаем вдали от резонанса, что показатель преломления имеет правильный асимптотический вид (7), где однако, $\tau' \sim (\omega_0 - \omega)/(\omega_0\Gamma)$.

Формула для τ качественно правильно описывает время задержки. Большего согласия трудно требовать ввиду приближенности всех используемых соотношений.

4. Выразим основную формулу (7) только через наблюдаемые величины. Вводя парциальные сечения упругого рассеяния

$$\sigma_l = (4\pi / k^2)(2l+1)\sin^2\delta_l,$$

можно выразить через них парциальные времена задержки

$$\tau_l \equiv \frac{1}{k}\,\frac{d\delta_l}{dk} = \left(\frac{\sigma_l^{(R)}}{\sigma_l} - 1\right)^{-1/2} \frac{d}{dk^2}\ln(k^2\sigma_l),$$

где $\sigma_l^{(R)}$ — резонансное сечение ($\delta_l = {}^1/_2\pi$). Отсюда для (7) получаем выражение

$$n' - 1 = \rho\,\frac{c}{k}\left(\frac{\sigma_l^{(R)}}{\sigma_l} - 1\right)^{-1/2} \frac{d}{dk^2}\ln(k^2\sigma_l). \tag{19}$$

Формула (19) показывает, во-первых, пределы применимости (7) в зависимости от близости к резонансу и, во-вторых, объясняет причину, по которой столь простое выражение не было ранее замечено. Действительно, выражение n', согласно (19), а уже тем более следующая отсюда формула для n, столь громоздки, что без введения концепции длительности вряд ли поддаются эвристической трактовке.

5. Любопытно отметить, что для некоторых предельных случаев известны формулы, сходные с (7). Так, например, для сечения рассеяния на шариках ([4], формула (1,102)) при $|n-1| \ll 1$ принимают, что

$$|n-1| \approx \lambda^2\rho R, \tag{20}$$

а поскольку в этом случае $\sigma = \lambda^2$, а $R = c\tau$, то (20) переходит в (7). В нейтронной оптике ([5]) также применяется близкое соотношение

$$|n^2 - 1| = \pi\rho\lambda^2 a,$$

где $|n^2-1| \approx 2(n-1)$ и $a \sim c\tau$ — длина когерентного рассеяния (аналогично вводится показатель преломления для ядерного вещества).

Институт кибернетики
Академии наук ГрузССР
Тбилиси

Поступило
30 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. E. Perel'man, Phys. Lett., 32A, 64 (1970); М. Е. Перельман, ЖЭТФ, 58, 2139 (1970); Сообщ. АН ГрузССР, 59, 569 (1970). [2] М. Борн, Е. Вольф, Основы оптики, «Наука», 1970. [3] М. Гольдбергер, К. Ватсон, Теория столкновений, М., 1967. [4] Р. Ньютон, Теория рассеяния волн и частиц, М., 1969. [5] А. С. Давыдов, Теория атомного ядра, 1958, стр. 468.