Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 4

УДК 517.919 *МАТЕМАТИКА*

Ю. А. ПЫХ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 4 X 1971)

Рассматривается автономная система нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{p}_i = p_i \frac{\Phi_i(p) - G(p)}{G(p)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Здесь p — вектор с компонентами p_i, $G(p) = \sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(p)$. Функции $\Phi_i(p)$ непрерывны на симплексе $\sigma\left\{p \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p_i \geqslant 0\right\}$ и удовлетворяют условиям:

1) $\Phi_i(p) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \forall p \in \sigma$;

2) $\sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i(p) > 0 \quad \forall p \in \sigma$.

Системы типа (1) встречаются в задачах популяционной генетики ([1]) и математической экономики ([2]).

В силу физических ограничений имеют смысл только положительные и нормированные значения переменных, т. е. $p \in \sigma$. Нетрудно видеть, что решения уравнений (1) удовлетворяют этому требованию, если $p(t = 0) \in \sigma$.

Большую роль в изучении свойств таких систем играет якобиевая матрица функций $\Phi_i(p)$, которую будем обозначать через $Q = \|Q_{ij}\| = \|\partial \Phi_i(p) / \partial p_j\|$. В популяционной генетике, например, элементы матрицы Q имеют смысл взаимных влияний особей различных генотипов, а сама матрица Q называется матрицей взаимодействий.

Ставится задача получения критериев устойчивости особых точек системы (1).

Пусть p_0 — равновесный вектор системы. Обозначим через L подмножество из совокупности индексов $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, для которого $p_{l0} = 0$ при $l \in L$, а через $\bar{L}$ — дополнение L для всего множества I. Из (1) ясно, что справедливо соотношение

$$\Phi_i(p_0) = G(p_0), \quad i \in \bar{L}. \tag{2}$$

Произведем в (1) замену переменной $p = p_0 + x$:

$$\dot{x}_i = \frac{\varphi_i(x) - g(x)}{g(x)} (p_{i0} + x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Здесь $\varphi_i(x) = \Phi_i(p_0 + x)$, $g(x) = G(p_0 + x)$.

Новые переменные удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \tag{4}$$

и ограничениям $-p_{i0} \leqslant x_i \leqslant 1 - p_{i0}$, т. е. движение системы (3) происходит на множестве

$$X\left\{x \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0; \quad -p_{i0} \leqslant x_i \leqslant 1 - p_{i0}\right\}.$$

Для разыскания достаточных критериев устойчивости невозмущенного движения построим знакоопределенную функцию $V(x)$ и установим условия, при соблюдении которых производная этой функции, составленная в силу уравнений движения (3), окажется знакоопределенной противоположного знака, тогда в силу теоремы Ляпунова об устойчивости ([3]) можно при выполнении этих критериев утверждать об устойчивости невозмущенного движения $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ — «в большом».

Функцию Ляпунова выберем в виде положительно знакоопределенной на X функции

$$V(x) = -\sum_{i=1}^{n} p_{i0} \ln (p_{i0} + x_i).$$

Составляя производную $V(x)$ в силу уравнений движения и используя условие (4), получаем

$$\dot{V}(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{p_{i0}}{p_{i0} + x_i} + \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \dot{x}_i}{p_{i0} + x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i(x). \tag{5}$$

Здесь опущен положительный множитель $g(x)$. Таким образом, достаточным условием устойчивости рассматриваемого положения равновесия будет выполнение неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i(x) \leqslant 0, \quad x \in X.$$

Для выяснения знака функции $\dot{V}(x)$ воспользуемся разложением

$$\varphi_i(x) = \Phi_i(p_0) + \sum_{j=1}^{n} Q_{ij}(p_0) x_j + \ldots \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), получаем

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(p_0) x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Q_{ij}(p_0) x_i x_j + \ldots$$

Принимая во внимание (2), перепишем первый член последнего выражения так:

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(p_0) x_i = \sum_{i \in L} \Phi_i(p_0) x_i + G(p_0) \sum_{i \in \bar{L}} x_i$$

или, учитывая, что в силу (4)

$$\sum_{i \in \bar{L}} x_i = -\sum_{i \in L} x_i,$$

для $\dot{V}(x)$ имеем

$$\dot{V}(x) = \sum_{i \in L} (\Phi_i(p_0) - G(p_0)) x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Q_{ij}(p_0) x_i x_j + \ldots \tag{7}$$

Из определения множества X вытекает, что $x_i \geqslant 0 \quad \forall i \in L$. Следовательно, при $x_i > 0$, $i \in L$, знак $\dot{V}(x)$ определяется коэффициентами первого члена в (7), а при $x_i = 0$, $i \in L$, знак $\dot{V}(x)$ будет определяться квадратичной формой $\sum_{i \in \bar{L}} \sum_{j \in \bar{L}} Q_{ij}(p_0) x_i x_j$. Окончательный результат можно сформулировать так:

Для устойчивости положения равновесия p_0 системы (1) достаточно выполнения неравенств

$$G(p_0) \geqslant \Phi_i(p_0) \quad \text{при } i \in L,$$
$$\sum_{i \in \bar{L}} \sum_{j \in \bar{L}} Q_{ij}(p_0) x_i x_j \leqslant 0, \quad x \in X. \tag{8}$$

З а м е ч а н и е. Так как формально (1) представляет непрерывное отображение замкнутого симплекса σ в себя, то неравенства (8) дают условия устойчивости неподвижных точек такого отображения.

В заключение выражаю благодарность Р. А. Полуэктову за обсуждение работы и ценные замечания.

Агрофизический научно-исследовательский институт
Всесоюзной академии сельскохозяйственных наук
им. В. И. Ленина
Ленинград

Поступило
5 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. A. F i s h e r, Genetical Theory of the Natural Selection, N. Y., 1958. [2] С. К а р л и н, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, М., 1964. [3] А. М. Л я п у н о в, Общая задача об устойчивости движения, М., 1959.