Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 6

УДК 517.535.6

МАТЕМАТИКА

Н. Н. МЕЙМАН

ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ ПОТЕНЦИАЛА ПЛОСКОГО ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 20 VII 1971)

1^0. Пусть G — конечно-связная область с границей положительной емкости, так что для любой точки $z_0 \in G$ существует функция Грина $g(z, z_0, G)$ с полюсом в точке z_0, гармоническая в G с точностью до $\ln|z - z_0|^{-1}$ и равная нулю почти везде на границе ∂G, т. е. везде, за исключением, быть может, гармонической меры нуль.

Обозначим через $\{a_k\}$ произвольную последовательность точек из G, а через $\{e_k\}$ — сосредоточенные в точках $\{a_k\}$ положительные заряды с конечным суммарным зарядом Q:

$$\sum e_k = Q < \infty. \tag{1}$$

Если существует электростатическое поле в G с зарядами $\{e_k\}$ в точках $\{a_k\}$ и заземленной границей, то потенциал этого поля $U(z, \{a_k\}, \{e_k\}, G)$ при z, отличном от точек $\{a_k\}$, конечен. Точнее, конечность $U(z)$ является критерием существования такого поля. Функция Грина $g(z, a_k, G)$ является потенциалом поля, индуцированного зарядом $^1/_2$ в точке a_k, поэтому

$$^1/_2 U(z, \{a_k\}, \{e_k\}; G) = \sum e_k g(z, a_k, G). \tag{2}$$

В этой формуле $g(z, a_k, G)$ обезразмерено, а $[U]$ и $[e_k]$ равны g/l.

Основной результат работы состоит в оценке сверху потенциала $U(z)$ в области G с некоторой выключенной системой окрестностей полюсов $\{a_k\}$. Будем вести изложение для односвязной области, а затем укажем изменения, связанные с общим случаем.

2^0. Как известно, неэвклидовым расстоянием $\chi(z_1, z_2)$ между двумя точками z_1, z_2 области G называется неэвклидово расстояние

$$\chi(w_1, w_2) = \int\limits_l \frac{|dw|}{1 - |w|^2} \tag{3}$$

между образами этих точек w_1, w_2 при конформном отображении области G на круг $|w| < 1$. Интеграл (3) берется по отрезку неэвклидовой прямой l, соединяющей точки w_1 и w_2. Интеграл (3) инвариантен при конформном отображении единичного круга на себя, поэтому $\chi(z_1, z_2)$ инвариантно при любом конформном отображении. При стремлении одной из точек z_1, z_2 к границе $\chi(z_1, z_2)$ стремится к бесконечности как $\ln(1/d)$, где d — расстояние от точки z_i до границы.

Основная теорема. *Пусть $\{e_k\}$ — произвольная совокупность положительных зарядов с конечным суммарным зарядом Q, сосредоточенных в точках произвольной последовательности $\{a_k\}$ области G, и H — произвольное число из интервала $0 < H < {}^1/_2$.*

Для заданных $\{e_k\}$, $\{a_k\}$ и H существует такая конечная или счетная система неэвклидовых кружков $C_\nu\{z: \chi(z, \alpha_\nu) < \chi_\nu\}$ с общей суммой радиусов

$$\sum \chi_\nu < {}^1/_2 \ln \frac{1 + 2H}{1 - 2H}. \tag{4}$$

что для любой точки $z \in G \setminus \bigcup C_\nu$ выполняется неравенство

$$\sum e_k g(z, a_k, G) < Q\,(1 - \ln H). \tag{5}$$

Для доказательства теоремы необходима

Лемма. *Для любых трех точек $z_{1,2,3}$ области G справедливо следующее неравенство треугольника:*

$$\exp[-g_{23}] < \exp[-g_{12}] + \exp[-g_{13}], \tag{6}$$

где $g_{ik} = g(z_i, z_k, G)$.

Справедливость этого утверждения в конечном счете следует из неравенства треугольника в неэвклидовой метрике.

Неравенство (6) можно переписать в виде

$$|\varphi_{23}| < |\varphi_{12}| + |\varphi_{13}|, \tag{7}$$

где $\varphi_{ik} = \varphi(z_i, z_k, G)$ — отображение области G на круг $|w| < 1$, $z_k \to 0$.

Обозначим через $e[D]$ заряд в области $D \subset G$. При $H < 1$ существуют такие λ и α, что $e[z\colon g(z, \alpha, G) > \ln(Q/(\lambda H))] = \lambda$. Верхнюю грань таких λ обозначим λ_1, а полюса $\{a_k\}$, лежащие внутри этого неэвклидова кружка, назовем точками ранга λ_1. Удалим из $\{a_k\}$ все точки ранга λ_1, а для оставшейся последовательности определим ранг $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$, точки ранга λ_2 и т. д. Очевидно,

$$\{a_n\} = \bigcup \{a_n\}^{(\nu)}, \qquad \{a_n\}^{(\nu)} \cap \{a_n\}^{(\mu)} = \phi,$$

где $\{a_n\}$ —точки ранга ν с суммарным зарядом λ_ν и $\sum \lambda_\nu = Q$. В качестве запрещенных окрестностей возьмем неэвклидовы кружки $C_\nu(z\colon g(z, \alpha_\nu, G) > \ln(Q/(2\lambda_\nu H)))$, концентрические с кружками $g(z, \alpha_\nu, G) > \ln(Q/\lambda_\nu H))$, но большего радиуса. Неэвклидов радиус кружка C_ν *равен*

$$\chi_\nu = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + 2\lambda_\nu H/Q}{1 - 2\lambda_\nu H/Q}, \qquad \sum \chi_\nu < \frac{1}{2}\ln\frac{1 + 2H}{1 - 2H} \tag{8}$$

(последнее следует из доказательства леммы).

Оценим заряд кружка $K\{z'\colon g(z', z, G) > Q/(\lambda H)\}$, центр которого лежит в $G \setminus \bigcup C_\nu$. С этой целью оценим ранг λ_j любой точки a_j, лежащей в K. Очевидно,

$$g(a_j, \alpha_j; G) > \ln Q/(\lambda_j H), \qquad g(a_j, z, G) > \ln Q/(\lambda H),$$
$$g(z, \alpha_j, G) \leqslant \ln Q/(2\lambda_j H),$$

и, применяя лемму, получим $\lambda_j < \lambda$. Из определения ранга следует

$$e[z'\colon g(z', z, G) > \ln Q/(\lambda H)] < \lambda. \tag{9}$$

Заменим полюса a_k, не меняя зарядов e_k, на полюса $\hat{a}_k(z)$, так что $g(\hat{a}_k, z) \geqslant g(a_k, z)$ и заряд $\hat{e}$, подсчитанный по полюсам $\hat{a}$, удовлетворяет условиям

$$\hat{e}[\zeta\colon g(\zeta, z) > \ln Q/(\lambda H)] \leqslant \lambda; \quad \hat{e}[\zeta\colon g(\zeta, z) > \ln(1/H)] = Q. \tag{10}$$

Выполнимость этих условий следует из (9). Справедливы соотношения

$$\sum e_k G(\hat{a}_k, z, G) = \int_0^Q g\,d\hat{e} = \hat{e}g\Big|_{\hat{e}=0}^{\hat{e}=Q,\ g=-\ln H} - \int_{\infty}^{\ln 1/H} \hat{e}\,dg. \tag{11}$$

Положив в интеграле справа $g = \ln Q/(\lambda H)$, в силу (9), получим

$$\sum e_k g(a_k, z, G) < \sum e_k g(\hat{a}_k, z, G) \leqslant Q\,(1 - \ln H). \tag{12}$$

Для теории функций весьма важен тот частный случай общей теоремы, когда все заряды одинаковы.

Т е о р е м а. *Для любой системы n точек $\{a_k\}$ из G и любого H из интервала $0 < H < {}^1/_2$ и $z \in G \setminus \bigcup C_\nu$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} g(z, a_k, G) < n(1 - \ln H). \qquad (13)$$

3°. Для формулировки основной теоремы в случае p-связной области G, ограниченной p-простыми жордановыми кривыми Γ_k, $k = 1, \ldots, p$, введем понятия квазигриновской функции $\check{g}(z_1, z_2, G)$ и квазинеэвклидова расстояния $\chi(z_1, z_2, G)$.

О п р е д е л е н и е. Пусть $z_{1,2} \in G$, тогда $\check{g}(z_1, z_2, G) = \min\{g(z_1, z_2, G_k)$, $\check{\chi}(z_1, z_2, G) = \max\{\chi(z_1, z_2, G_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, p$, где G_k — односвязная область, ограниченная контуром Γ_k и содержащая G.

Легко убедиться, что

$$\check{\chi}(z_1, z_2, G) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \exp[-\check{g}(z_1, z_2, G)]}{1 - \exp[-\check{g}(z_1, z_2, G)]}.$$

Для квазигриновской функции справедливо неравенство, аналогичное (6):

$$\exp[-\check{g}_{23}] < \exp[-\check{g}_{12}] + \exp[-\check{g}_{13}],$$

а квазинеэвклидово расстояние удовлетворяет неравенству треугольника. Основная теорема остается в силе с тем отличием, что система исключительных дисков C_ν заменяется системой квазинеэвклидовых дисков $\check{C}_\nu\{z, \check{\chi}(z, a_\nu) < \check{\chi}_\nu\}$, причем $\sum \check{\chi}_\nu < \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 2H}{1 - 2H}$.

4°. Общая теорема переносится на случай плоскости.

Т е о р е м а. *Пусть суммарный заряд $\sum e_k = Q < +\infty$ и H_e — произвольное положительное число. Существует такая конечная или счетная система эвклидовых кружков C_ν с общей суммой радиусов, не превышающей $2H_e$, что для любого z вне этой системы кружков*

$$-\sum e_\nu \ln|z - a_\nu| < Q(1 - \ln H_e). \qquad (14)$$

Действительно, пусть $R \gg |Z|$ и $|a_k| < R$. Тогда $g(z, a, G_R) = -\ln|z - a| + \ln R + O(1/R)$. Здесь G_R означает круг $|z| \leqslant R$.

Выберем $H_R = H_e / R$, тогда по общей теореме неравенство (14) выполняется при $z \in G_R \setminus \bigcup \hat{C}_\nu$, где $\hat{C}_\nu$ — система неэвклидовых кружков с общей суммой радиусов, не превышающей $\frac{1}{2} \ln \frac{1 + 2H_R}{1 - 2H_R}$. При $R \to \infty$ эта система переходит в систему эвклидовых кружков с общей суммой радиусов $\leqslant 2H_e$.

В случае равных зарядов $e_k = 1$ получается известная теорема А. Картана ([1], [2]). Для всех z вне исключительных кружков с суммой радиусов $2H$

$$|(z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_n)| > (H / e)^n. \qquad (15)$$

Институт теоретической и экспериментальной физики
Москва

Поступило
15 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. C a r t a n, Ann. Ec. Norm., (3), 45 (1928). [2] Н. Г. Ч е б о т а р е в, Н. Н. М е й м а н, Тр. Матем. инст. АН СССР, 26 (1949).