А. В. НАГАЕВ, С. К. САКОЯН

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ,
УЧИТЫВАЮЩИЕ БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ, В R_k**

(Представлено академиком Ю. В. Линником 24 XI 1971)

Пусть $\xi_j, j = 1, 2, \dots$, — независимые одинаково распределенные k -мерные случайные векторы. Пусть далее $s_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

Если B — ковариационная матрица вектора ξ_1 невырождена, что для любого борелевского множества D с ростом n

$$P \left\{ \frac{s_n - na}{\sqrt{n}} \in D \right\} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{k/2} |B|^{1/2}} \int_D e^{-1/2(B^{-1}x, x)} dx, \quad (1)$$

где a — вектор математических ожиданий ξ_1 .

Если же $\tilde{D} = D_n$ меняется вместе с n и при этом $\min_{x \in D_n} |x|$ неограниченно растет, то поведение вероятности (1) составляет содержание так называемой проблемы больших уклонений в R_k (см. (1-5)).

Данное сообщение содержит некоторые результаты, примыкающие к исследованиям, начатым в работе (3), поэтому мы по возможности придерживаемся принятой там формы изложения.

Будем всюду считать, что существует окрестность нуля $\mathfrak{D} \subset R_k$ такая, что для всех $\lambda \in \mathfrak{D}$

$$v(\lambda) = Me^{(\lambda, \xi_1)} < \infty. \quad (A)$$

Условие (A) является многомерным аналогом двустороннего условия Крамера (см. (6), условие (A)).

Если выполнено условие (A), то для любой замкнутой окрестности нуля $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{D}$ существует функция

$$m(\alpha) = \inf_{\lambda \in \mathfrak{F}} v(\lambda) e^{-(\lambda, \alpha)} = v(\lambda(\alpha)) e^{-(\lambda(\alpha), \alpha)},$$

причем α принимает значения из области Φ , которая получается из $\mathfrak{F}$ отображением $\alpha(\lambda) = \text{grad} \ln v(\lambda)$. Обозначим

$$B(\lambda) = \left\| \frac{\partial^2 \ln v(\lambda)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right\|, \quad i, j = 1, \dots, k,$$

и пусть

$$M(\alpha) = B(\lambda(\alpha)). \quad (2)$$

По поводу свойств функции $m(\alpha)$ см. (3).

Известно, что поведение вероятности $P\{s_n - na \in D_n\}$ определяется расположением области $D_n' = D_n/n$ относительно семейства поверхностей уровня Γ_ψ функции $\psi(\alpha) = \ln m(\alpha)$. Здесь Γ_ψ — граница множества A_ψ тех α , для которых $\psi(\alpha) \geq \psi, \psi < 0$.

Отказ от каких бы то ни было локальных свойств исходного распределения приводит к необходимости несколько сузить класс областей D_n по сравнению с рассматриваемым в работе (3).

Пусть $f(t)$ непрерывна и строго возрастает в промежутке $[0, \beta]$, причем $f(0) = 0$. Поставим каждому вектору $x = (x_1, \dots, x_{h-1}, x_h)$ в соответствие вектор $x^{(h)} = (0, \dots, 0, x_h)$. Определим множество K_0 следующим образом: $K_0 = \{x: 0 \leq x_h \leq \beta, |x - x^{(h)}| < f(x_h)\}$. Пусть $\mathfrak{K} = \{K\}$ — класс множеств, получающихся из K_0 преобразованием движения. Множества K будем называть коническими телами. Точку на K , отвечающую точке 0 на K_0 , назовем вершиной конического тела. Разобьем R_h на кубы с ребром Δ . Пусть $S(D, \Delta)$ — максимальное множество, содержащееся в D , из алгебры, порождаемой нашим разбиением, а $\bar{S}(D, \Delta)$ — минимальное множество из той же алгебры, содержащее D .

О п р е д е л е н и е. Скажем, что $D \in \mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\omega, K_0)$, если D измеримо по Жордану и

1°) для любого $x \in \Gamma_D$ найдется коническое тело $K \in \mathfrak{K}$ с вершиной в точке x , целиком лежащее в D ;

2°) существует функция $\omega(\Delta)$, $\omega(\Delta) \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$, такая, что при $0 \leq \psi \leq \psi_0$ «площадь» гиперповерхности $\Gamma_\psi \cap (\bar{S}(D, \Delta) \setminus S(D, \Delta))$ не превосходит $\omega(\Delta)$.

И н т е г р а л ь н а я т е о р е м а. Пусть

$$0 > \psi_n = \sup \{ \psi : A_\psi \cap D'_n \neq \emptyset \} > -\infty.$$

Если $\psi_n \rightarrow 0$ и при любом δ из некоторого промежутка $(0, \delta_0)$

$$A_{\psi_n - \delta} \cap D'_n \in \mathfrak{D},$$

то

$$P \{s_n - na \in D_n\} = \frac{n^{1/2k} e^{n\psi_n}}{(2\pi)^{1/2k}} \int_0^\delta e^{-n\psi} \varphi_n(\psi) d\psi (1 + o(1)),$$

где, как и в работе (3) (см. теорему 2, а также (2))

$$\varphi_n(\psi) = \int_{D'_n \cap \Gamma_{\psi_n - \psi}} |M(\alpha)|^{-1/2} d\alpha.$$

Приведенная теорема является многомерным аналогом классической теоремы Крамера (см. (6), теорема 1) о больших отклонениях порядка $o(\sqrt{n})$. Если исходное распределение нерешетчато, то утверждение теоремы справедливо и в том случае, когда $\liminf |\psi_n| > 0$. Здесь достаточно потребовать, чтобы для некоторого $\delta > 0$ множество $A_{\psi_n - \delta} \cap D'_n$ было элементом класса $\mathfrak{D}$ и целиком лежало внутри области Φ . Отметим еще, что в условиях интегральной теоремы при $\psi_n = o(n^{-2/3})$

$$P \{s_n - na \in D_n\} = \frac{1}{(2\pi n)^{1/2k} |B|^{1/2}} \int_{D_n} e^{-\frac{1}{2n} (B^{-1}x, x)} dx (1 + o(1)).$$

Доказывая интегральную теорему, можно, не теряя общности, считать, что распределение вектора ξ_t относится к одному из трех типов: а) нерешетчато, т. е. $|M e^{i(t, \xi)}| < 1$ при любом t ; б) решетчато, причем решетка, порождаемая значениями ξ_t , совпадает с множеством целочисленных векторов в R_k ; в) m -решетчато, т. е. m первых компонент вектора ξ_t имеют совместное решетчатое, а $k - m$ последних — нерешетчатое распределение.

Если распределение случайного вектора ξ_i относится к одному из указанных типов, то при $|x|/n \rightarrow 0$

$$P\{s_n - na - x \in D_0\} = \frac{m^n (x/n) (1 + o(1))}{(2\pi n)^{1/2k} |M(x/n)|^{1/2}},$$

где $D_0 = \{u : 0 \leq u_i < 1, 1 \leq i \leq k\}$.

Соотношение (3) является исходным при доказательстве интегральной теоремы.

Институт математики им. В. И. Романовского
Академии наук УзССР
Ташкент

Поступило
28 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. Рихтер, Теория вероятн. и ее примен., 9, 1, 31 (1964). ² Вилкаускас, Литовск. матем. сборн., 5, 1, 24 (1965). ³ А. А. Боровков, Б. А. Rogozin, Теория вероятн. и ее примен., 10, 1, 61 (1965). ⁴ А. В. Нагаев, Изв. АН УзССР, сер. физ. матем., 1, 23 (1965). ⁵ А. В. Нагаев, Сборн. Предельные теоремы и статистические выводы, Ташкент, 1966, стр. 67. ⁶ Г. Крамер, УМН, 10, 166 (1944).