В. Г. НЕВЗГЛЯДОВ

**О КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ
В ТЕОРИИ О. БОРА — МОТТЕЛЬСОНА**

(Представлено академиком Л. И. Седовым 6 VII 1971)

1. Используя для описания возбужденных состояний ядра коллективной природы модель заряженной капли идеальной несжимаемой жидкости, О. Бор (1) берет кинетическую энергию безвихревого движения ядерного вещества в виде

$$T = T_v + T_r, \quad T_v \equiv 1/2 B (\dot{\beta}^2 + \beta^2 \dot{\gamma}^2), \quad T_r \equiv 1/2 \mathfrak{I}_k q_k^2; \quad (1,1)$$

q_k — компоненты угловой скорости вращения главных осей деформации на оси эллипсоида — поверхности возбужденного ядра, $\mathfrak{I}_k$ — моменты инерции деформации (не смешивать с моментом инерции вращения) и U — потенциальная энергия:

$$\mathfrak{I}_k \equiv 4B\beta^2 \sin^2(\gamma - k \cdot 2/3\pi), \quad U = 1/2 C \beta^2. \quad (1,2)$$

При наличии статической деформации остова эффективную потенциальную энергию берем в виде

$$U = 1/2 C (\beta - \beta_0)^2 + 1/2 C \gamma \beta \beta_0 (\gamma - \gamma_0)^2; \quad (1,3)$$

β_0 , γ_0 определяют статическую (равновесную) форму остова, а именно, ее отклонение от сферы (т. е. полуоси эллипсоида) (1,3) — это модификация формулы О. Бора, предложенная в феноменологическом подходе А. Давыдовым (2). Используя угловой момент деформации M_k , можно T_r записать в виде

$$M_k = \mathfrak{I}_k q_k, \quad T_r = 1/2 \mathfrak{I}_k q_k^2 = M_k^2 / (2\mathfrak{I}_k) \quad (1,4)$$

(по подчеркнутому индексу нет суммирования). Движение ядерного вещества принято (1, 3, 4) иллюстрировать движением идеальной жидкости во вращающейся эллипсоидальной твердой оболочке (задача Ламба — Жуковского (5)) и на основе этой аналогии считать в (1,4) M^2 изменяющимся независимо от $\mathfrak{I}_k$. Тогда, полагая $\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_2 \equiv \mathfrak{I}_0$, $\mathfrak{I}_3 = 0$ и квантуя M^2 , получают «ротационную полосу»

$$T_r = \frac{M^2}{2\mathfrak{I}_0} \rightarrow \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}_0} I(I+1). \quad (1,5)$$

При этом не учитывается существенное отличие: движение жидкости во вращающейся оболочке принудительное, а движение ядра инерционное. Мы ставим задачу: найти классическое инерционное движение ядра, соответствующее модели О. Бора — Моттельсона, т. е. описываемое функцией Лагранжа $L = T - U$.

2. Составим уравнения Лагранжа. Для обобщенных координат β и γ получаем

$$B(\ddot{\beta} - \beta \dot{\gamma}^2) - \beta^{-1} \mathfrak{I}_k q_k^2 + C(\beta - \beta_0) + 1/2 \beta_0 C \gamma (\gamma - \gamma_0)^2 = 0, \quad (2,1)$$

$$B \frac{d}{dt} (\beta^2 \dot{\gamma}) - \frac{1}{2} q_k^2 \frac{\partial \mathfrak{I}_k}{\partial \gamma} + \beta \beta_0 C \gamma (\gamma - \gamma_0) = 0. \quad (2,2)$$

Уравнения Лагранжа для неголономных скоростей q_k имеют вид

$$\frac{d}{dt} (\mathfrak{S}_1 q_1) - (\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_1) q_2 q_3 = 0 \quad (2,3)$$

(два другие получаются круговой перестановкой индексов). Ротационная полоса типа (1,5) получается в предположении, что β и γ в (1,2) постоянные (отличные от β_0 , γ_0 , в противном случае $q_k = 0$ и движение отсутствует). Поэтому будем искать решение уравнений (2,1), (2,2), полагая $\beta = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$, тогда они принимают вид

$$C(\beta - \beta_0) + 1/2 \beta_0 C_\gamma (\gamma - \gamma_0)^2 = \beta^{-1} \mathfrak{S}_k q_k^2, \quad (2,4)$$

$$\beta \beta_0 C_\gamma (\gamma - \gamma_0) = 1/2 q_k^2 \partial \mathfrak{S}_k / \partial \gamma. \quad (2,5)$$

Отсюда видно, что q_k тоже должны быть постоянными и (2,3) принимает вид

$$(\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_3) q_2 q_3 = (\mathfrak{S}_3 - \mathfrak{S}_1) q_3 q_1 = (\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2) q_1 q_2 = 0. \quad (2,6)$$

Из этих уравнений два независимы, и мы имеем четыре уравнения для отыскания пяти β , γ , q_k , т. е. только одна постоянная (интеграл движения) является независимой, и все остальные интегралы движения (также T , E , M) выражаются через нее. Удобно независимым интегралом взять угловой момент ядра M . Если все три $q_k = 0$, то (2,6) удовлетворены, но при этом движения не будет. Движение будет и уравнения (2,6) удовлетворяются, если: 1) два из q_k равны нулю и одно отлично от нуля, 2) одно q_k равно нулю и два отличны от нуля. Легко видеть, что во втором случае должна существовать ось динамической симметрии, два из $\mathfrak{S}_k$ должны быть равны, а именно

$$\gamma = 1/6\pi; \quad \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_3 = 1/4 \mathfrak{S}_1 = B\beta^2 = \text{const}. \quad (2,7)$$

Рассмотрим случай 1): $q_1 = q = \text{const}$, $q_2 = q_3 = 0$; тогда уравнения (2,4), (2,5) принимают вид

$$C(\beta - \beta_0) + 1/2 C_\gamma \beta_0 (\gamma - \gamma_0)^2 = 4B\beta^2 q^2 \sin^2(\gamma - 2/3\pi), \quad (2,8)$$

$$\beta \beta_0 C_\gamma (\gamma - \gamma_0) = 2B\beta^2 q^2 \sin 2(\gamma - 2/3\pi). \quad (2,9)$$

Если $\beta_0 = 0$ и $\beta > 0$, то имеется следующее решение:

$$\gamma = 1/6\pi; \quad q = 1/2 \omega_0, \quad \omega_0^2 \equiv C/B; \quad M = \mathfrak{S}_1 q = 2B\beta^2 \omega_0; \quad (2,10)$$

$$T = U = 1/4 M \omega_0; \quad E = 1/2 M \omega_0 \rightarrow 1/2 \hbar \omega_0 \sqrt{I(I+1)}, \quad (2,11)$$

т. е. ротационной полосы не получается, спектр E почти эквидистантный. Если $\beta_0 \neq 0$, тогда $\beta \geq \beta_0$ и уравнения (2,8), (2,9) имеют два решения: а) $\gamma = 1/6\pi$; б) $0 < \gamma < 1/6\pi$. В случае а) имеется следующее решение:

$$\gamma = \gamma_0 = 1/6\pi; \quad q = 1/2 \omega_0 \sqrt{1 - \beta_0/\beta}; \quad M = 2B\beta^2 \omega_0 \sqrt{1 - \beta_0/\beta}; \quad (2,12)$$

$$T = 1/4 M \omega_0 \sqrt{1 - \beta_0/\beta} \rightarrow 1/4 \hbar \omega_0 \sqrt{I(I+1)} (1 - \beta_0/\beta)^{1/2}. \quad (2,13)$$

Если $\beta \geq \beta_0$, то

$$T = 1/4 M \omega_0 \left[1 - \beta_0 \left(\frac{2B\omega_0}{M} \right)^{1/2} \mathfrak{S}^{1/2} \right] \rightarrow \frac{1}{4} \hbar \omega_0 \sqrt{I(I+1)} \left[1 - \beta_0 \left(\frac{2B\omega_0}{\hbar \sqrt{I(I+1)}} \right)^{1/2} \right]^{1/2}.$$

Если $\beta > \beta_0$, то в (2,13) β как функция M^2 находится из уравнения

$$M^2 = 4B\omega_0^2 \beta^3 (\beta - \beta_0). \quad (2,14)$$

Спектр энергии тоже почти эквидистантный.

В случае б) $0 < \gamma < 1/6\pi$, и для важного частного случая $C_\gamma = C$ и $\gamma_0 = 0$ имеется следующее решение:

$$\gamma = i^{3-1/2} \left[\sqrt{2 \frac{\beta}{\beta_0} - 1} - 1 \right]; \quad q = 1/3 \omega_0 \left[2 \frac{\beta}{\beta_0} - 3 + \sqrt{2 \frac{\beta}{\beta_0} - 1} \right]^{1/2}; \quad (2,15)$$

$$M = \frac{1}{3} \omega_0 B \beta^2 \left[1 - \frac{2}{3} \frac{\beta}{\beta_0} + 2 \sqrt{2 \frac{\beta}{\beta_0} - 1} \right] \cdot \left[2 \frac{\beta}{\beta_0} - 3 + \sqrt{2 \frac{\beta}{\beta_0} - 1} \right]^{1/2}; \quad (2,16)$$

$$T = \frac{1}{6} M \omega_0 \left[2 \frac{\beta}{\beta_0} - 3 + \sqrt{2 \frac{\beta}{\beta_0} - 1} \right]^{1/2} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{6} \hbar \omega_0 \sqrt{I(I+1)} \left[2 \frac{\beta}{\beta_0} - 3 + \sqrt{2 \frac{\beta}{\beta_0} - 1} \right]^{1/2}, \quad (2,17)$$

так как $0 < \gamma < 1/2$, то $\beta_0 < \beta < 4\beta_0$, причем β как функция M^2 находится из уравнения

$$\left\{ \frac{81 M^2}{B^2 \omega_0^2} - \beta^4 \left[8 \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^3 + 60 \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^2 - 138 \frac{\beta}{\beta_0} + 45 \right] \right\}^2 = \\ = \beta^8 \left(2 \frac{\beta}{\beta_0} - 1 \right) \left[-44 \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^2 + 204 \frac{\beta}{\beta_0} - 135 \right]^2. \quad (2,18)$$

При $\beta = \beta_0$ движения нет: $\gamma = q = M = 0$. В случае $\gamma_0 \neq 0$ и $C \neq C_\gamma$ формулы более громоздки, но имеют тот же характер. Спектр E почти эквидистантный.

Рассмотрим случай 2): $q_1 = 0, q_2 \neq 0, q_3 \neq 0$. Тогда (2,6) дают уравнения (2,7). (В случае $q_3 = 0$, когда $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2$ и $\gamma = \gamma_0 = 0$, движения не существует.) Уравнения (2,4), (2,5) принимают вид

$$q^3 = q_2^2 + q_3^2 = \omega_0^2 \left\{ 1 - \frac{\beta_0}{\beta} \left[1 - \frac{C_\gamma}{2C} \left(\frac{\pi}{6} - \gamma_0 \right)^2 \right] \right\}; \quad (2,19)$$

$$-q_2^2 + q_3^2 = \frac{\omega_0^3}{\sqrt{3}} \frac{\beta_0}{\beta} \frac{C_\gamma}{C} \left(\frac{\pi}{6} - \gamma_0 \right). \quad (2,20)$$

Отсюда получаем

$$q = \omega_0 \left\{ 1 - \frac{\beta_0}{\beta} \left[1 - \frac{C_\gamma}{2C} \left(\frac{\pi}{6} - \gamma_0 \right)^2 \right] \mathfrak{S} \right\}^{1/2}; \quad M = B \beta^2 q; \quad (2,21)$$

$$T = 1/2 M \omega_0 \left\{ 1 - \frac{\beta_0}{\beta} \left[1 - \frac{C_\gamma}{2C} \left(\frac{\pi}{6} - \gamma_0 \right)^2 \right] \right\}^{1/2}. \quad (2,22)$$

Для $\gamma_0 = 0$ и $C_\gamma = C$ получаем

$$T \rightarrow 1/2 \hbar \omega_0 \sqrt{I(I+1)} \left[1 - \frac{\beta_0}{\alpha} \frac{\pi}{12} \right]^{1/2}, \quad (2,23)$$

и при $\beta_0 \ll \beta$ имеем

$$T \rightarrow 1/2 \hbar \omega_0 \sqrt{I(I+1)} \left\{ 1 - \frac{\pi \beta_0}{24} \left(\frac{B \omega_0}{\hbar \sqrt{I(I+1)}} \right)^{1/2} \right\}. \quad (2,24)$$

Если же только $\beta_0 < \beta$, то β , как функция M^2 , находится из уравнений

$$M^2 = B^2 \omega_0^2 \beta^4 \left\{ 1 - \frac{\beta_0}{\beta} \left[1 - \frac{C_\gamma}{2C} \left(\frac{\pi}{6} - \gamma_0 \right)^2 \right] \right\}. \quad (2,25)$$

Во всех случаях имеется только один независимый интеграл движения, которым выбираем M , все остальные выражаются через него. Легко выра-

зять через него также потенциальную энергию U . Спектр энергии $E = T + V$ получается почти эквидистантный. Ротационной полосы типа (1,5) не получается. Чтобы получить ротационную полосу, надо обобщить теорию на случай вихревого движения ядерного вещества, как это показано в работе автора (6).

Дальневосточный государственный университет
Владивосток

Поступило
6 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ О. Бор, Сборн. ПСФ, № 9 (1955); № 1 (1956). ² А. С. Давыдов, Возбужденные состояния атомных ядер, 1967. ³ Л. Ландау, Я. Смородинский, Лекции по теории атомного ядра, М., 1955. ⁴ А. С. Давыдов, Теория атомного ядра, 1958. ⁵ Н. Е. Жуковский, Избр. соч., 1, 1948, стр. 34—60. ⁶ В. Г. Невзглядов, Теория тела однородной деформации и ее применение к атомному ядру, Владивосток, 1970.