

Б. А. ПАСЫНКОВ

ФАКТОРИЗАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ НЕЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 21 VII 1971)

1. Раньше факторизационные теоремы доказывались либо для всего отображаемого пространства $(^{1, 2, 6})$, либо для его замкнутых подмножеств $(^{3-5})$. Оказывается, в классе метрических пространств факторизационная теорема справедлива для счетной системы любых (не обязательно замкнутых) подмножеств отображаемого пространства. В частности, факторизационная теорема оказывается справедливой для непрерывных отображений счетномерных метрических пространств в метрические пространства. Это позволяет стандартным способом (см. $(^2, ^6)$) доказать теоремы J. Nagata о существовании универсальных счетномерных метрических (сильно метризуемых) пространств веса τ .

Подпространство A нормального пространства X назовем r -совершенно расположенным, если для любого конечного открытого покрытия λ множества A существует такое конечное открытое покрытие $\omega = \{O_i\}$, $i = 1, \dots, s$, некоторой окрестности множества A множествами типа F_σ в X , что кратность системы $\omega \leq r + 1$ и покрытие $\{O_i \cap A\}$, $i = 1, \dots, s$, множества A вписано в покрытие λ .

Примеры. 1) Подпространство A совершенно нормального пространства X размерности $\dim A \leq r$ является r -совершенно расположенным.

2) Замкнутое подпространство F нормального пространства X размерности $\dim F \leq r$ является r -совершенно расположенным.

Теорема 1. Пусть дано непрерывное отображение $f: X \rightarrow Z$ нормального пространства X в метрическое пространство Z . Пусть в пространстве X дана счетная система r -совершенно расположенных множеств A_i , $i = 1, 2, 3, \dots$.

Тогда существует такое метрическое пространство Y , такие его подпространства B_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, и такие непрерывные отображения $g: X \rightarrow Y$ и $h: Y \rightarrow Z$, что

1) $f = hg$,

2) $gA_i \subseteq B_i$, $\dim B_i \leq r$, $i = 1, 2, 3, \dots$;

3) $wY \leq wZ$, $wB_i \leq wfA_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$ *.

Замечание 1. Если в формулировке теоремы 1 пространство X совершенно нормально, то требование r -совершенной расположенности множеств A_i можно заменить требованием $\dim A_i \leq r$, $i = 1, 2, 3, \dots$.

Систему множеств A_α , $\alpha \in \mathfrak{A}$, пространства X назовем внутренне замкнутой, если каждое множество A_α замкнуто в сумме $\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$.

Следствие 1. Пусть дано непрерывное отображение $f: X \rightarrow Z$ метрического пространства X в метрическое пространство Z . Пусть система $v = \{A_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, множества пространства X распадается в счетную сумму систем v_i , каждая из которых внутренне замкнута и локально счетна в своем теле $\bar{v}_i = \{x: x \in A_\alpha, A_\alpha \in v_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$.

* Считаем wZ и $wfA_i \geq \aleph_0$, $i = 1, 2, 3, \dots$

Тогда существует такое метрическое пространство Y , такие его подмножества B_α , $\alpha \in \mathfrak{A}$, и такие непрерывные отображения $g: X \rightarrow Y$ и $h: Y \rightarrow Z$, что

- 1) $f = hg$;
- 2) $gA_\alpha \subseteq B_\alpha$, $\dim B_\alpha \leq \dim A_\alpha$, если $\dim A_\alpha < \infty$, и множество B_α счетномерно, если множество A_α счетномерно, $\alpha \in \mathfrak{A}$;
- 3) $wY \leq wZ$.

Следствие 2 (факторизационная теорема для счетномерных пространств). Пусть дано непрерывное отображение $f: X \rightarrow Z$ совершенно нормального счетномерного пространства X в метрическое пространство Z .

Тогда существует такое счетномерное метрическое пространство Y и такие непрерывные отображения $g: X \rightarrow Y$ и $h: Y \rightarrow Z$, что $f = hg$ и $wY \leq wZ$.

Опираясь на следствие 2, совершенно так же как в ⁽²⁾ и ⁽⁶⁾, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 2 (J. Nagata, ⁽⁷⁾). В классе счетномерных метрических пространств веса $\leq \tau$ существует универсальное пространство $R_{\aleph_0}^{\aleph_0}$.

Теорема 3. (J. Nagata, ⁽⁸⁾). Произведение $B(\tau) \times R_{\aleph_0}^{\aleph_0}$ обобщенного борковского пространства веса τ на $R_{\aleph_0}^{\aleph_0}$ универсально в классе счетномерных сильно метризуемых пространств веса $\leq \tau$.

В связи со сформулированными теоремами укажем на справедливость следующего утверждения.

Теорема 4. В классе нормальных слабо счетномерных пространств веса $\leq \tau$ существует универсальное пространство Π^{ω_τ} , являющееся счетной суммой бикомпактов Π_n размерности $\dim \Pi_n \leq n$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

2. В ⁽⁹⁾ Е. Г. Скрыренко доказал справедливость формулы *

$$\dim X \leq \dim Y + \dim f \quad (*)$$

для замкнутого отображения $f: X \rightarrow Y$ паракомпакта X на паракомпакт Y . В ⁽¹⁰⁾ показано, что формула (*) имеет место и в случае замены паракомпактности пространства X всего лишь на его нормальность.

Из указанного только что результата Е. Г. Скрыренко и из равенства $\dim X = \dim \beta X$ для нормального (и даже вполне регулярного) пространства X вытекает

Предложение 1. Для непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ нормального (и даже вполне регулярного) пространства X на нормальное (и даже вполне регулярное) пространство Y справедлива формула

$$\dim X \leq \dim Y + \dim \beta f,$$

где βf означает продолжение отображения f на максимальные бикомпактные расширения βX и βY пространств X и Y .

Таким образом, равенство

$$\dim f = \dim \beta f \quad (**)$$

обеспечивает выполнение формулы (*).

Ниже формулируются некоторые условия, гарантирующие равенство (**).

Определение. Дизъюнктное покрытие ω топологического пространства X назовем чешуйчатым, если оно представляется в виде счетной суммы таких своих подсистем ω_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, что система ω_1 дискретна в X и состоит из замкнутых в X множеств, а при $i > 1$ система ω_i состоит из замкнутых во множестве $X_i = X \setminus \bigcup_{j < i} \omega_j$ множеств и дискретна в этом множестве X_i .

* $\dim f = \sup \{ \dim f^{-1}y : y \in Y \}$.

Топологическое пространство будем называть F -пространством. (или чешуйчатым), если в любое его открытое покрытие можно вписать чешуйчатое покрытие.

Легко видеть, что F -пространствами будут все точечно паракомпактные (а следовательно, и паракомпактные) пространства, а также пространства, в любое открытое покрытие которых можно вписать σ -дискретное замкнутое покрытие.

Оказывается, нормальное F -пространство счетно паракомпактно, а коллективно нормальное F -пространство — паракомпактно.

Всюду ниже рассматриваемые пространства считаются вполне регулярными.

Теорема 5. Для непрерывного замкнутого отображения $f: X \rightarrow Y$ нормального пространства X на F -пространство Y справедливы формулы (***) и (*).

Следствие 3. Для непрерывного замкнутого отображения $f: X \rightarrow Y$ нормального пространства X на точечно паракомпактное пространство Y справедливы формулы (***) и (*).

Сформулированное следствие обобщает цитированный выше результат из ⁽¹⁰⁾ и усиливает теорему А. В. Зарелуа из ⁽¹¹⁾.

Следствие 4. Для нормального произведения $X \times Y$ бикompакта X на F -пространство Y справедливо соотношение

$$\dim X \times Y \leq \dim X + \dim Y.$$

Примечание при корректуре. Утверждение следствия 3 независимо получено также В. В. Филипповым.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. Mardešić, III. J. Math., 4, № 2, 278 (1960). ² Б. А. Пасынков, Fund. Math., 60, № 3, 285 (1967). ³ А. В. Зарелуа, Сиб. матем. журн., 5, № 3, 532 (1964). ⁴ А. В. Архангельский, ДАН, 174, № 6, 1243 (1967). ⁵ Б. А. Пасынков, ДАН, 182, № 2, 268 (1968). ⁶ Б. А. Пасынков, ДАН, 154, № 5, 1042 (1964). ⁷ J. Nagata, Proc. Japan. Acad., 39, № 4, 197 (1963). ⁸ J. Nagata, Fund. Math., 48, № 1, 1 (1959). ⁹ Е. Г. Склиаренко, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math., 10, № 8 (1962). ¹⁰ Б. А. Пасынков, Вестн. Моск. ун-в., Математика и механика, № 4, 3 (1965). ¹¹ А. В. Зарелуа, Матем. сборн., 60, № 1, 17 (1963).